நிகழ்தகவும் அதன் செயற்பாடுகளும்

கோ. இராதாகிருஷ்ணன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவன

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—864

நிகழ்தகவும் அதன் செயற்பாடுகளும்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்

கோ. இராதாகிருஷ்ணன், எம். எஸ்சி.,
உதவிப் பேராசிரியர்,
புள்ளியியல் துறை, மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — May, 1980
Number of Copies — 1000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 864

© Government of Tamilnadu

PROBABILITY AND ITS APPLICATIONS

G. RADHAKRISHNAN

Price Rs. 13-50

Published by the Tamilnadu Text-book Society under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by
Stree Seva Mandir Press,
Madras - 600 017

பதிப்புரை

நிகழ்தகவும் அதன் செயற்பாடுகளும் என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 864 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 899 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூகநல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	நிகழ்தகவு	...	1
2.	ராண்டம் மாறிகள்	...	27
3.	பலதரமாறிப் பரவல்கள்	...	44
4.	கணக்கியல் எதிர்நோக்கல்	...	63
5.	சில தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறிகள்	...	102
6.	தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்	...	138
7.	மாறிகளின் மாற்றங்கள்	...	183
8.	கூறுப் பரவல்கள்	...	202
9.	இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவல்	...	231
10.	ஒருங்குத் தேற்றங்கள்	...	243
11.	விளையாட்டுக் கொள்கை	...	257
12.	வரிசைக் கொள்கை	...	295
13.	'மார்க்காவ்' – ன் சங்கிலிகள்	...	320
	கலைச்சொற்கள்	...	342

1. நிகழ்தகவு
(PROBABILITY)

17ஆம் நூற்றுண்டின் இடைப்பகுதியில் சீட்டாட்டம், பகடை விளையாட்டுகள் போன்ற சூது விளையாட்டுகள் ஃபிரெஞ்சு நாட்டில் பிரபலமாயிருந்தன. இத்தகைய சீட்டு விளையாட்டுகளின்போது ஒருவருக்கு ஏற்படுகின்ற வெற்றி வாய்ப்பைப்பற்றிப் பாஸ்கல் (Pascal), ஃபெர்மாட் (Format) என்பவர்களால் வெளியிடப்பட்ட தகவல்கள் நிகழ்தகவுக்கொள்கையின் ஆரம்ப காலத் தகவல்களாகும். பின்னர் 18ஆம் நூற்றுண்டில் நிகழ்தகவுக் கொள்கைக்குரிய கணித உருவ அமைப்பு கொடுக்கப்பட்டது. ஒரு ராண்டம் சோதனையின் மொத்த விளைவுகள் 'n' என்றும் அவற்றில் 'm' விளைவுகள் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமானதாகவும் இருந்தால், நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ் தகவு $\frac{m}{n}$ என்ற பின்னமாக வரையறுக்கப்பட்டது. இந்த வரையறையில் மொத்த விளைவுகள், சாதகமான விளைவுகள் எல்லாமே கணித வாயிலாகக் கணக்கிடப்பட்டன. உதாரணமாக, ஒரு பிறழ்ச்சியற்ற நாணயத்தைச் சுண்டினுல் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகள் தலை அல்லது பூ. தலை கிடைக்கிறது என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும். 18ஆம் நூற்றுண்டில் டீ மாவர் (De Moivre) என்ற அறிஞரின் '*The Doctrine of Chances—A Method of Calculating Probabilities in Play*' என்ற முக்கியமான நிகழ்தகவுபற்றிய புத்தகம் வெளி வந்தது. இதில் பல வாய்ப்பு விளையாட்டுகளுக்கு (Chance games) நிகழ்தகவு கணக்கிடப்படும் முறைகளுடன் இயல் நிலைப் பரவல்பற்றியும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. பின்னர் நிகழ்தகவு பற்றிய இரண்டாம் வரையறை வெளியாயிற்று. இது புள்ளியியல் நிகழ்தகவு அல்லது பின் நிகழ்தகவு எனக் குறிக்கப்பட்டது. இந்த வரையறையின்படி ஒரேவிதமான சூழ்நிலையில் ஒரு முயற்சி மீண்டும் மீண்டும் ஏராளமான முறைகள் நடத்தப்பட்டு நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவுகள் : மொத்த விளைவுகள் என்ற விகிதத்தின் ஒருங்கு (Limit) நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

இந்த நூற்றுண்டின் இடைப்பகுதியில் நிகழ்தகவிற்கு வலுவான கணித வரையறை கோல்மோக்ராவ் (Kolmogorov) என்ற ரஷ்யரால்

தரப்பட்டுள்ளது. இதன்படி ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p ஓர் அளவையாக (measure) வரையறுக்கப்படுகிறது. அளவைக் கொள்கையின் (Measure Theory) தேற்றங்களுக்கு இணையாக நிகழ்தகவுத் தேற்றங்கள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இனி நிகழ்தகவின் வரையறையைப்பற்றிப் பார்ப்போம்.

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் விளைவுகள் அனைத்தையும் ஒரு கணத்தின் புள்ளிகளாகக் குறித்தால் அந்தக் கணம் (set) நிகழ்தகவு வெளி அல்லது கூறுவெளி (Probability Space or Sample Space) எனப்படுகிறது. இந்தக் கணம் Ω என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் ஓர் ஆரம்ப நிகழ்ச்சி (Elementary event) எனப்படுகிறது. Ωவின் ஒவ்வொரு துணைக் கணமும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. இவை A, B, C, ... என்ற எழுத்துகளால் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை (அறுமுக கனச் செவ்வகம், முறையே பக்கங்களில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்களைக் கொண்டது பகடையாகும்) வீசும் சோதனையில் கூறுவெளி 6 புள்ளிகளைக் கொண்டதாக இருக்கும். A என்ற நிகழ்ச்சி இரட்டைப் படை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறித்தால் A, Ωவின் துணைக் கணமான {2, 4, 6} ஐக் குறிக்கிறது. இந்த முறையில் எந்தத் துணைக் கணத்தை வேண்டுமானாலும் கருதலாம். அவை யாவுமே நிகழ்ச்சிகளாகும். இவைகளுடன் φ, Ω என்ற பூச்சியக் கணம் (Null set) ஆகியவையும் நிகழ்ச்சிகளாகக் கருதப்படுகின்றன. ஒரு நிகழ்ச்சி A–க்கு சாதகமான புள்ளிகள் 'm' ஆகவும் கூறுவெளியில் உள்ள மொத்தப் புள்ளிகள் 'n' ஆகவும் இருந்தால் A–க்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{m}{n}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்தமுறையில் φ–க்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{0}{n} = 0$ ஆகும். எனவே, φ நடக்க இயலாத நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. இதே போன்று Ω-க்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{n}{n} = 1$ ஆகும். எனவே, Ω நிச்சயமான அல்லது உறுதியான நிகழ்ச்சி (Certain event) எனப்படுகிறது. ஒரு கூடையில் 1, 2, 3 என்ற இலக்கங்களுடைய 3 பந்துகள் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். கூடையிலிருந்து இரு பந்துகள் ராண்டமாக எடுக்கப்படும் சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தச் சோதனைக்குரிய கூறு வெளியில் மொத்தம் உள்ள புள்ளிகள் $3C_2 = 3$ ஆகும். அவை முறையே (1, 2), (1, 3), (2, 3) ஆகும். இந்தக் கூறுவெளியில் ஒவ்வொரு கூறுபுள்ளியும் ஒரு வெக்டர் (Vector) ஆகக் குறிக்கப்படுகின்றது. தம்பதிகளின் வயது என்று எடுத்துக்கொண்டால் ஒவ்வொரு தம்பதிக்கும் ஒவ்வொரு

(x, y) என்ற மதிப்பு இருக்கும். குறிப்பிட்ட வருடத்தில் ஓர் ஊரில் மணம் செய்து கொண்ட தம்பதிகளின் வயதைக் குறிக்க (x, y) $\frac{10 \leq x \leq 60}{10 \leq y \leq 60}$ என்ற முறையிலும் கூறுபுள்ளிகளைக் குறிக்கலாம்.

நிகழ்ச்சிகள்பற்றிய சில வரையறைகள்

எதிர்மறை நிகழ்ச்சி A^c அல்லது A' : A என்ற நிகழ்ச்சி நிகழாத பொழுதெல்லாம் நடைபெறும் நிகழ்ச்சி Aயின் எதிர்மறை நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை வீசும் சோதனையில் A என்பது 2 அல்லது அதன் பெருக்குத்தொகை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறித்தால் A^c 1 அல்லது 3 அல்லது 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும். எந்த ஒரு நிகழ்ச்சி A-க்கும், $A \cup A^c = \Omega$ ஆகும். எனவே $P(A) = 1 - P(A^c)$.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி (Mutually exclusive events) : இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்று நிகழ்கையில் மற்றது நிகழ இயலாத முறையில் அமைந்தால் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு காசைச் சுண்டும் சோதனையில் தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும் பூ கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

சார்புடை நிகழ்ச்சிகள் : இரு நிகழ்ச்சிகள் A, B என்பன ஒன்று நிகழ்வதால் மற்றதன் நிகழ்தகவு பாதிக்கப்படுகிற முறையில் இருந்தால் அவை சார்புடைய நிகழ்ச்சிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக, நன்கு கலைக்கப்பட்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து முதலில் ஒரு சீட்டை வெளியில் எடுத்து வைத்துவிட்டு, கட்டை நன்கு கலைத்துவிட்டு மீண்டும் ஒரு சீட்டை எடுப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். A என்பது முதலில் சிகப்புச் சீட்டு எடுப்பதையும் B என்பது இரண்டாவது சிகப்புச் சீட்டு எடுப்பதையும் குறித்தால் Bயின் நிகழ்தகவு A முதலில் நிகழ்வதைப் பொறுத்து அமைகிறது. எனவே, இங்கு Aயும் Bயும் சார்புள்ள நிகழ்ச்சிகளாகும்.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் : சென்ற சோதனையில் முதலில் எடுத்த சீட்டின் வண்ணத்தைக் குறித்துக்கொண்டு மீண்டும் அச் சீட்டைக் கட்டில் கலந்து நன்கு கலைத்து இரண்டாம் சீட்டை எடுத்தால் Aயும் Bயும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகின்றன. இரு நிகழ்ச்சிகள் A, B ஒன்று நிகழ்வது அல்லது நிகழாதிருப்பது மற்றதன் நிகழ் தகவைப் பாதிக்காத முறையில் அமைந்திருந்தால் அவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகும. இதே வரையறையை இரண்டு நிகழ்ச்சிகளுக்குப் பதிலாக n நிகழ்ச்சிகளுக்கு நீட்டித்துக் (extend) கொள்ளலாம்.

நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு : நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் m ஆகவும் கூறுவெளியிலுள்ள மொத்த ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் n என்றுமிருந்தால் நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{m}{n}$ என்று கண்டோம். இதன்படி $P(\Omega) = 1$ என்றும் $P(\varphi) = 0$ என்றுமாகிறது. A, B என்பன கூறு வெளியிலுள்ள இரு ஒட்டில்லா நிகழ்ச்சிகள் (Disjoint events) என்ருல் அவை கீழ்க்கண்ட கொள்கைகளைப் பூர்த்தி செய்வனவாய் இருக்கும்.

கொள்கை 1 : $P(A) \geq 0$. கூறுவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் இது உண்மையாயிருக்கும்.

கொள்கை 2 : $P(\Omega) = 1$

கொள்கை 3 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (Aயும் Bயும் ஒட்டில்லா நிகழ்ச்சிகள்.)

$A_1, A_2, \ldots A_N$ என்பன ஒட்டில்லா நிகழ்ச்சிகள் என்ருல் $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_N) = P(A_1) + \ldots\ldots + P(A_N)$.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

(1) இரு பகடைகளை வீசும் சோதனையில், பகடைகளின் முகப்பிலுள்ள கூட்டுத் தொகை 5 கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

இந்தச் சோதனையில் உள்ள மொத்த ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் :

(1, 1),	(1, 2),	(1, 3),	(1, 4),	(1, 5),	(1, 6)
(2, 1)	...	...	...	...	(2, 6)
(3, 1)	...	...	...	...	(3, 6)
(4, 1)	...	...	...	...	(4, 6)
(5, 1)	...	...	...	...	(5, 6)
(6, 1)	...	...	...	...	(6, 6)

ஆக மொத்தம் 36 ஆகும். இவற்றுள் நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) ஆகிய 4 ஆகும். எனவே, நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{4}{36}$. மேற்குறித்த கணக்கில் பகடைகளின் மிகக் குறைந்த கூட்டுத் தொகை 2 ஆகும்.

மிக அதிகமான கூட்டுத் தொகை 12 ஆகும், ஒவ்வொன்றிற்கும் உரிய நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டால் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் கிடைக்கும்.

கூட்டுத்தொகை	நிகழ்தகவு
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
கூடுதல்	1

எல்லாவிதமான வாய்ப்புகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளையும் கணித்து விட்டதால் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை சரியாக ஒன்றுயிருக்கிறது.

(2) ஒரு பையிலுள்ள 4 சிவப்பு, 3 வெள்ளை, 5 கறுப்பு பந்துகளிலிருந்து (நிறம் தவிர மற்ற எல்லா விதங்களிலும் ஒன்றுயிருப்பவை) ராண்டமாக 3 பந்துகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. அவை, (i) மூன்றும் சிவப்பாயிருப்பதற்குரிய, (ii) மூன்றும் வெள்ளையாயிருப்பதற்குரிய, (iii) மூன்றும் கறுப்பாய் இருப்பதற்குரிய, (iv) 2 வெள்ளை 1 சிவப்பாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தவு என்ன?

பையில் மொத்தம் உள்ள பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 12$. இவற்றிலிருந்து 3 பந்துகள் எடுக்க மொத்த வழிகள் $= 12C_3$
மூன்று சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 4C_3$

(i) எனவே மூன்று சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{4C_3}{12C_3} = \frac{1}{55}$$

மூன்று வெள்ளைப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய

$$\text{வழிகள்} = 3C_3 = 1$$

(ii) எனவே மூன்று வெள்ளைப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{1}{12C_3} = \frac{1}{220}$$

மூன்று கறுப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 5C_3$

(iii) எனவே மூன்று கருப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{5C_3}{12C_3} = \frac{1}{33}$$

இரு வெள்ளை, ஒரு சிவப்புப் பந்துகள் எடுப்பதற்குரிய வழிகள் $= 3C_2 \times 4C_1$

(iv) எனவே இரு வெள்ளை, ஒரு சிவப்புப் பந்துகள்

$$\text{எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு} = \frac{3C_2 \times 4C_1}{12C_3} = \frac{1}{55}$$

(3) 'சிவப்பு' என்ற வார்த்தையின் எழுத்துகளை ராண்டமாக வரிசைப்படுத்தினுல் 'சி' என்ற எழுத்திற்கும் 'ப்' என்ற எழுத்திற்கும் இடையே சரியாக ஓர் எழுத்து அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

சிவப்பு என்ற வார்த்தையில் மொத்தம் உள்ள எழுத்துகள் 4. எனவே, அவற்றை $\lfloor 4$ வழிகளில் வரிசையாக அடுக்கலாம். மொத்தம் உள்ள 4 இடங்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறித்தால் [1] [2] [3] [4] 'சி' என்ற எழுத்து 1 என்ற இலக்கிலும் 'ப்' என்ற எழுத்து 3 என்ற இலக்கிலும் இருந்தால் இவ்விரண்டு எழுத்துகளுக்கிடையில் ஓர் எழுத்து இருக்கும். இம்முறையில் வைத்து மீதி உள்ள இரு எழுத்துகளை இரு இடங்களில் $\lfloor 2$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். 'சி'ஐயும் 'ப்'ஐயும் இடம் மாற்றினுல் மேலும் $\lfloor 2$ வழிகளில் மீதமுள்ள எழுத்துகளை வரிசைப்படுத்தலாம். இதே போன்று 'சி' ஐ 2 என்ற இலக்கிலும் 'ப்'ஐ 4 என்ற இலக்கிலும் வைத்து $\lfloor 2$ வழிகளிலும் அவற்றை இடம் மாற்றி வைத்து $\lfloor 2$ வழிகளிலும் வரிசைப் படுத்தலாம். எனவே, 'சி'-க்கும் 'ப்'-க்கும் இடையே ஓர் எழுத்து இருக்கும்படி மொத்தமாக $4 \times \lfloor 2 = 8$ வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம். எனவே, நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு

$$\frac{8}{\lfloor 4} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(4) ஒரு பெட்டியில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. மற்றொரு பையில் 2 வெள்ளைப்பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. முதற் பையிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து இரண்டாவது பைக்கு மாற்றப்படுகிறது. பின்னர் இரண்

டாவது பையிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இந்தச் சோதனைக்குரிய எல்லாக் கூறுப் புள்ளிகளையும் விவரித்து இறுதியில் வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

முதற் பையிலுள்ள வெள்ளைப் பந்துகள் W_{11}, W_{12}, W_{13} என்றும், இரண்டாம் பையிலுள்ள வெள்ளைப் பந்துகள் W_{21}, W_{22} என்றுமிருக்கட்டும். இதேபோன்று முதற் பையிலுள்ள கறுப்புப் பந்துகள் B_{12}, B_{11} என்றும் இரண்டாம் பையிலுள்ள கறுப்புப் பந்துகள் B_{21}, B_{22}, B_{23} என்றுமிருக்கட்டும். W_{11} என்ற பந்து மாற்றப்படுமானால் இரண்டாவது பையிலுள்ள பந்துகள் W_{11}, W_{21}, W_{22}, B_{21}, B_{22}, B_{23} என்றிருக்கும். எனவே, இவற்றிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது மேற்குறித்த 6 பந்துகளுள் ஒன்றாக இருக்கும். இந்த 6 ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் கூறு வெளியிலுள்ள புள்ளிகளாகும்.

அதாவது W_{11} என்ற பந்து மாற்றப்பட்டால் கூறு வெளியிலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்

$$\left.\begin{matrix} W_{11} \\ W_{21} \\ W_{22} \\ B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \end{matrix}\right\} 6$$

W_{12} என்ற பந்து மாற்றப்பட்டால் கூறு வெளியிலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்

$$\left.\begin{matrix} W_{12} \\ W_{21} \\ W_{22} \\ B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \end{matrix}\right\} 6$$

W_{13} என்ற பந்து மாற்றப்பட்டால் கூறு வெளியிலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்

$$\left.\begin{matrix} W_{13} \\ W_{21} \\ W_{22} \\ B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \end{matrix}\right\} 6$$

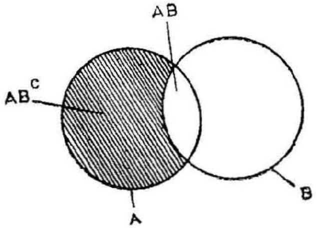
B_{12} என்ற பந்து மாற்றப்பட்டால் கூறு வெளியிலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்

$$\left.\begin{matrix} W_{21} \\ W_{22} \\ B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \\ B_{12} \end{matrix}\right\} 6$$

B_{11} என்ற பந்து மாற்றப்பட்டால்
கூறு வெளியிலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்

$$\left.\begin{array}{c} W_{21} \\ W_{22} \\ B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \\ B_{11} \end{array}\right\} 6$$

ஆக மொத்தம் $5 \times 6 = 30$ ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் கூறு வெளியில் இருக்கும். இவற்றுள் வெள்ளைப் பந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமானவை 13. எனவே, வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{13}{30}$.



படம் 1.

தேற்றம் : ஒரு கூறு வெளியிலுள்ள A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A B^c) = P(A) - P(AB)$.

நிரூபணம்

ABயும் AB^cம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். எனவே, கொள்கை 3-ன்படி,

$$P(A) = P[AB \cup AB^c] = P(AB) + P(AB^c).$$

$$\therefore P(AB^c) = P(A) - P(AB)$$

தேற்றம் : A என்பது கூறு வெளியிலுள்ள ஒரு நிகழ்ச்சியென்றால் $P(A^c) = 1 - P(A)$.

நிரூபணம் : $\Omega = A + A^c$

எனவே $P(\Omega) = 1 = P(A + A^c)$

$$= P(A) + P(A^c)$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A).$$

தேற்றம் : கூறு வெளியிலுள்ள A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

நிரூபணம் : $A \cup B$ஐ, ஒன்றையொன்று விலக்கும் இரு நிகழ்ச்சிகள் A, A^cB ஆகியவற்றின் சேர்க்கையாக எழுதலாம்.

எனவே $P(A \cup B) = P(A \cup A^cB)$

$$= P(A) + P(A^cB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

n நிகழ்ச்சிகளுக்கான தேற்றம் : $A_1, A_2, \ldots A_n$ என்பன கூறு வெளியிலுள்ள n நிகழ்ச்சிகள் என்றால்

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n] = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\ldots A_n)$$

நிரூபணம் : தேற்றம் $n = m$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மை என அனுமானித்து $n = m+1$ என்ற மதிப்பிற்கும் உண்மையாயுள்ளது என நிரூபித்தால் n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தேற்றம் உண்மை என்று நிரூபணமாகி விடும் (ஏற்கெனவே $n = 2$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மை என முந்திய தேற்றத்தில் நிரூபித்துள்ளதால்).

$n = m$ என்றிருக்கும்போது

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \ldots + (-1)^{m-1} P(A_1A_2\ldots A_m)$$

$$\therefore P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_{m+1}] = P\left[\frac{B}{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_m \cup A_{m+1}}\right]$$

$$= P(B) + P(A_{m+1}) - P(BA_{m+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) \ldots\ldots\ldots + (-1)^m P(A_1 \ldots\ldots\ldots A_m)$$

$$+ P(A_{m+1}) - P[A_1A_{m+1} \cup A_2A_{m+1} \cup \ldots\ldots \cup A_mA_{m+1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \ldots (-1)^m P(A_i \ldots A_m) + P(A_{m+1})$$

$$- \left[\sum_{i} P(A_iA_{m+1}) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_jA_{m+1}) + \ldots + (-1)^m P(A_i \ldots A_mA_{m+1}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \ldots\ldots (-1)^m P(A_i \ldots\ldots A_mA_{m+1})$$

எனவே, தேற்றம் $n = m$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாயிருக்கும் போது $n = m+1$ என்ற மதிப்பிற்கும் உண்மையாயுள்ளது. ஆகவே, n-ன் எல்லா முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் தேற்றம் உண்மையா யிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. இரு பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. A என்பது 2 அல்லது அதன் பெருக்குத் தொகை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி யையும் B என்பது 3 அல்லது அதன் பெருக்குத் தொகை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியையும் குறித்தால் A U B-ன் நிகழ்தகவு என்ன?

X என்பது பகடைகளை வீசும்போது கிடைக்கும் எண்களைக் குறிக்கட்டும். X எடுக்கும் மதிப்புகள் முறையே 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ஆகும். X-ன் மதிப்புகளும் அதன் நிகழ்தகவு களும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	1/36	2/36	3/36	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A எனும் நிகழ்ச்சி $X = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ என்ற மதிப்புகள் எடுக்கும்போது நிகழ்கிறது. 2, 4, 6, 8, 10, 12 ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆதலால்

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8) + P(10) + P(12)$$
$$= \frac{18}{36}$$

இதே போன்று B என்னும் நிகழ்ச்சி $X = 3, 6, 9, 12$ என்ற மதிப்பு கள் எடுக்கும்போது நிகழ்கிறது.

$$\text{எனவே } P(B) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$$

AB எனும் நிகழ்ச்சி $X = 6, 12$ என்ற மதிப்புகள் எடுக்கும்போது நிகழ்கிறது. எனவே, $P(AB) = \frac{6}{36}$

கூடுதல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$= \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36}$$

2. சென்ற எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கில் A, Bயுடன் C என்பது 4 (அல்லது) அதன் பெருக்குத் தொகை என்றால் A ∪ B ∪ C என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவும் $\frac{24}{36}$ எனக் காட்டுக.

X = 4, 8, 12 என்ற மதிப்புகள் எடுக்கும்போது C நிகழ்கிறது. எனவே $P(C) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36}$

$$= \frac{9}{36}$$

கூட்டல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த நமக்கு மேலும் தேவையான நிகழ்தகவுகள் P(AC), P(BC), P(ABC) ஆகும். C நிகழும் போதெல்லாம் Aயும் நிகழ்கிறது. எனவே, $P(AC) = P(C) = \frac{9}{36}$.

BC என்னும் நிகழ்ச்சி X = 2 என்ற மதிப்பை எடுக்கும்போது நிகழ்கிறது. எனவே $P(BC) = \frac{1}{36}$. X, 12 என்ற மதிப்பை எடுக்கும்போது ABC நிகழ்கிறது. எனவே $P(ABC) = \frac{1}{36}$.

$$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

$$= \frac{18}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} - \frac{6}{36} - \frac{9}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{24}{36}$$

பூலின் சமமின்மை (Boole's Inequality) : $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ என்பன திட்டமான நிகழ்ச்சிகள் என்றால் $P[A_1 \cup A_2 \cup A_n] \le P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.

நிரூபணம் : n = 2 என்ற மதிப்பிற்குத் தேற்றம் உண்மை என நிரூபித்துப் பின்னர் தொகுப்புவாத முறைப்படி (Induction method) n-ன் எல்லா முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் தேற்றம் உண்மை என நிரூபிக்கலாம்.

n = 2 என்றால் $P[A_1 \cup A_2] \le P(A_1) + P(A_2)$.

கூட்டல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இதை உடனே நிரூபித்து விடலாம். $P[A_1 \cup A_2] = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

தேற்றம் $n = m$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாயிருக்கட்டும். அதாவது $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_m) \leq P(A_1) + \dots + P(A_m)$. பிறகு $P(\overbrace{A_1 \cup \dots A_m}^{B} \cup A_{m+1}) \leq P(B) + P(A_{m+1})$ ($n=2$-க்கு உண்மையாதலால்) $P(B) \leq P(A_1) + \dots + P(A_m)$. எனவே, $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m \cup A_{m+1}) \leq P(A_1) + \dots\dots + P(A_m) + P(A_{m+1})$. ஆகையால், தேற்றம் n-ன் எல்லா முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாயிருக்கும்.

பயிற்சி

(1) 4 பகடைகளை வீசும் சோதனையில் கூறு வெளியில் எத்தனை புள்ளிகள் இருக்கும்? 4 பகடைகளின் முகப்பு எண்களின் கூட்டுத் தொகை 8 ஆக இருப்பதன் நிகழ்தகவு என்ன?

(2) ஒரு பையில் 5 வெள்ளை, 3 சிவப்புப் பந்துகளும் இரண்டாவது பையில் 2 வெள்ளை, 4 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. முதற் பையிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து இரண்டாவது பைக்கு மாற்றப் படுகிறது. பின்னர் இரண்டாவது பையிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இந்தப் பந்து சிவப்பாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் கூறுப்புள்ளிகள் அனைத்தையும் குறித்துக் கணக்கிடுக.

(3) A, B என்பன ஒரு கூறு வெளியிலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள்: (i) $P[AB^c \cup BA^c] = P(A) + P(B) - 2P(AB)$ எனவும், (ii) $P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ எனவும் நிரூபி.

(4) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 என்ற எண்கள் எழுதப்பட்ட ஒரே அளவுள்ள அட்டைகள் உள்ள பெட்டியிலிருந்து ராண்டமாக இரு அட்டைகள் எடுக்கப்பட்டன. அவற்றிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை (i) இரட்டைப்படை எண்ணாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு, (ii) அவ்வாறு கிடைக்கின்ற மிகப் பெரிய கூட்டுத் தொகைக்குரிய நிகழ்தகவு, (iii) மிகச் சிறிய எண்ணிற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(5) 'கணக்கு' என்ற வார்த்தையின் எழுத்துகளை ராண்டமாக வரிசைப்படுத்தினால் 'க'விற்கும் 'கு'விற்கும் இடையே ஓர் எழுத்து அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(6) 1, 3, 4, 6 ஆகிய எண்களை ராண்டமாக வரிசைப்படுத்தி நான்கு இலக்க எண்கள் அமைத்தால் அது இரட்டைப்படை எண்ணாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? ஒற்றைப்படை எண்ணாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(7) 1, 4, 0, 5 ஆகிய எண்களை ராண்டமாக வரிசைப்படுத்தி நான்கு இலக்க எண்கள் அமைத்தால் அது ஐந்தால் வகுபடுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(8) 4 வெள்ளை, 5 சிவப்பு, 6 கறுப்புப் பந்துகளடங்கிய ஒரு பையிலிருந்து ராண்டமாக 3 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. (i) மூன்றுமே சிவப்பாக அமைவதற்குரிய, (ii) மூன்றுமே வெள்ளையாக அமைவதற்குரிய, (iii) மூன்றுமே கறுப்பாக அமைவதற்குரிய, (iv) ஒன்று சிவப்பு, ஒன்று வெள்ளை, ஒன்று கறுப்பாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

(9) பை I-ல் 4 வெள்ளை 3 சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. பை II-ல் 3 வெள்ளை, 4 சிவப்புப் பந்துகள் உள்ளன. பை I-ல் ராண்டமாக எடுக்கப்பட்ட இரு பந்துகள், பை II-க்கு மாற்றப்படுகிறது. பின்னர் பை II-லிருந்து ஒரு பந்து ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. இது வெள்ளையாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு: ஒரு நிகழ்ச்சி நடந்ததாக எடுத்துக் கொண்டு அத்துடன் இணைந்த மற்றொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டால், அந்த நிகழ்தகவு நிபந்தனை நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது. A என்பது நடந்த நிகழ்ச்சியாயும் B என்பது அத்துடன் இணைந்த மற்றொரு நிகழ்ச்சியும் என்றால் இந்த நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(B/A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கூடையில் 5 வெள்ளை 4 சிவப்புப் பந்துகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். முதலில் இதிலிருந்து ஒரு பந்து ராண்டமாக எடுக்கப்பட்டு வெளியே வைக்கப்படுகிறது. பின்னர் மற்றொரு பந்து ராண்டமாக எடுக்கப்படுகிறது. A என்பது முதலில் வெள்ளைப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சியையும் B என்பது இரண்டாவது வெள்ளைப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சியையும் குறித்தால் A நிகழ்ந்துவிட்டபோது கூடையில் 4 வெள்ளை, 4 சிவப்புப் பந்துகள் இருக்கும். இந்த நிலையில் ஒரு வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{4}{8}$. எனவே,

$$P(B/A) = \frac{4}{8}.$$

இதே போன்று இரு பகடைகளை வீசும் சோதனையில் பகடைகளின் முகப்பு எண்களின் கூட்டுத்தொகை எட்டு கிடைத்துள்ளது

என்ற விபரம் கொடுக்கப்பட்டு இரு நான்குகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்னவென்று கண்டுபிடிக்கக் கணக்கிட வேண்டிய ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் (4, 4), (6, 2) (3, 5) (2, 6) ஆகும். எனவே, மூலக்கூறு வெளியிலுள்ள 36 புள்ளிகளுள் இந்த 6 புள்ளிகள் அடங்கிய துணைக் கூறுவெளி இங்கு பயன்படுகிறது. 8 கிடைத்துள்ளது என்ற நிபந்தனையில் இரு நான்குகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$. இதே மதிப்பினை மூலக்கூறு வெளியின் மொத்தப் புள்ளிகளையும் பயன்படுத்தி $P(B/A) = \frac{1/36}{6/36} = \frac{P(AB)}{P(A)}$ என எழுதலாம். A இங்கு 8 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியையும் B இரு 4'கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கிறது.

இங்குள்ளபடியல்லாமல் பொதுவான கூறுவெளி Ωவிற்கும், A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் இது பொருந்தும். கூறுவெளி Ωவில் AB-க்கு சாதகமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் C என்றும் Ωவில் உள்ள மொத்த ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் n என்றும், A-க்கு சாதகமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் a என்றுமிருந்தால்,

$$P(B/A) = c/a = \frac{c/n}{a/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

எனவே $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ ஒரு பொது உண்மையாகிறது. இதற்குரிய ஒரே நிபந்தனை P(A) பூச்சியமாயிருக்கக்கூடாது. இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட பெருக்கல் தேற்றம் கிடைக்கிறது :

தேற்றம் : $P(AB) = P(A) \times P(B/A)$

$$= P(B) \times P(A/B)$$

இதனை மூன்று நிகழ்ச்சிகள் A, B, C-க்கு விரித்தால் $P(ABC) = P(A) . P(B/A) . P(C/AB)$ எனக் கிடைக்கும். இதுபோன்ற திட்டமான n நிகழ்ச்சிகளுக்கு விரித்து எழுதிக் கொள்ளலாம்.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் : A, B என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒன்று நிகழ்வது அல்லது நிகழாதிருப்பது, மற்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதை எந்த முறையிலும் பாதிக்காமல் இருந்தால் அவை சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன. எனவே சார்பற்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A/B) = P(A)$. ஏனெனில் B நிகழ்ந்துவிட்டதால் A எந்த விதத்திலும் பாதிக்கப்படாது. இதே போன்று $P(B/A) = P(B)$

ஆகும். இதனின்று சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கான பெருக்கல் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

$$P(AB) = P(A).\ P(B)$$

எனவே, இரு நிகழ்ச்சிகள் A, B சார்பற்றவையாயிருப்பதற்குரிய நிபந்தனை AB-க்குரிய நிகழ்தகவு Aயின் நிகழ்தகவையும் Bயின் நிகழ்தகவையும் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொகைக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

மூன்று நிகழ்ச்சிகள் : A, B, C என்ற மூன்று நிகழ்ச்சிகள் சார்பில்லாமல் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனைகள் :

(1) எந்த இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஜதையாகச் சார்பற்றிருக்க வேண்டும்.

(2) $P(ABC)$ $P(A).\ P(B).\ P(C)$ என்றிருக்க வேண்டும். அதாவது A, B, C என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று, சார் பில்லாமல் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனைகள் மொத்தம் நான்கு. அவை முறையே

(1) $P(AB) = P(A).\ P(B)$

(2) $P(AC) = P(A).\ P(C)$

(3) $P(BC) = P(B).\ P(C)$

(4) $P(ABC) = P(A).\ P(B).\ P(C)$

இதேபோன்று 4 நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லாமல் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனைகள், $P(ABCD) = P(A).\ P(B).\ P(C).\ P(D)$ என்ற நிபந்தனையுடன் எந்த மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றுக் கொன்று சார்பில்லாமல் இருக்க வேண்டும். இதேபோன்று 'n' நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லாமல் இருப் பதற்குரிய நிபந்தனைகள் n நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு அவற்றின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாயிருப்ப துடன் எந்த $(n-1)$ நிகழ்ச்சிகளும் சார்பில்லாமல் இருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

(1) பை I-ல் 3 சிவப்பு, 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் பை II-ல் 5சிவப்பு, 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பந்து ராண்டமாகப் பை I-லிருந்து பை II-ற்கு மாற்றப்படுகிறது. பின்னர் பை II-லிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அது வெள்ளையாக இருப்பதற்கு உரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

A என்பது பை I-லிருந்து வெள்ளைப் பந்து மாற்றப்படும் நிகழ்ச்சியாயிருக்கட்டும். எனவே, A^c என்பது சிவப்புப் பந்து

மாற்றப்படும் நிகழ்ச்சியாகும். B என்பது பை II-லிருந்து வெள்ளைப் பந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியாயிருக்கட்டும். B எனும் நிகழ்ச்சி கீழ்க்கண்ட ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒரு வகையில் நிகழும். அவை (i) AB, (ii) A^cB என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். பெருக்கல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இந்த நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவு கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

$$P(AB) = P(A).\ P(B/A)$$
$$= \frac{4}{7}.\ \frac{5}{10}$$
$$= \frac{20}{70}$$
$$P(A^cB) = P(A^c).\ P(B/A^c)$$
$$= \frac{3}{7}.\ \frac{4}{10} = \frac{12}{70}$$

B என்னும் நிகழ்ச்சி AB, B^cA என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒரு வகையில் நிகழலாம். எனவே, கூட்டல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி Bயின் நிகழ்தகவு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$P(B) = P(AB) + P(A^cB)$$
$$= \frac{20}{70} + \frac{12}{70}$$
$$= \frac{32}{70}$$

(2) பை I-ல் 3 சிவப்பு, 4 வெள்ளை, 5 நீலப் பந்துகளும் பை II-ல் 4 சிவப்பு, 2 வெள்ளை, 3 நீலப்பந்துகளும் உள்ளன. பை I-லிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து பை II-விற்கு மாற்றப்படுகிறது. பின்னர் பை II-லிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது (i) நீலமாக இருப்பதற்கு, (ii) வெள்ளையாக இருப்பதற்கு, (iii) சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

A_1 என்பது சிவப்புப் பந்து மாற்றப்படும் நிகழ்ச்சியையும், A_2 என்பது வெள்ளைப் பந்து மாற்றப்படும் நிகழ்ச்சியையும், A_3 என்பது நீலப் பந்து மாற்றப்படும் நிகழ்ச்சியையும், B_1 என்பது சிவப்புப் பந்து பை II-லிருந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியையும், B_2 என்பது வெள்ளைப் பந்து பை II-லிருந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியையும், B_3 என்பது நீலப் பந்து பை II-லிருந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கட்டும்.

B_3 என்ற நிகழ்ச்சி கீழ்க்கண்ட 3 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றாக நிகழும். அவை A_1B_3, A_2B_3, A_3B_3, என்ற 3 நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். பெருக்கல் தேற்றத்தை பயன் படுத்தி இந் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$P(A_1B_2) = P(A_1)\,P(B_3A_1)$$
$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{10}$$
$$= \frac{9}{120}$$
$$P(A_2B_3) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{10}$$
$$= \frac{12}{120}$$
$$P(A_3\,B_3) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{10}$$
$$= \frac{20}{120}$$

எனவே $P(B_3) = P(A_1B_3) + P(A_2B_3) + P(A_3B_3)$

$$= \frac{9}{120} + \frac{12}{120} + \frac{20}{120}$$
$$= \frac{41}{120}$$

பை II-லிருந்து நீலப்பந்து எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{41}{120}$.

வெள்ளைப் பந்து எடுக்கப்படும் B_2 என்ற நிகழ்ச்சி கீழ்க்கண்ட 3 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்றாக நிகழும். அவை $A_1\,B_2$, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_2$ என்ற நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(A_1B_2) = P(A_1) \cdot \quad P(B_2/A_1)$$
$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{10}$$
$$= \frac{6}{120}$$
$$P(A_2B_2) = P(A_2) \cdot \; P(B_2 / A_2)$$
$$= \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{10}$$

$$= \frac{12}{120}$$

$$P(A_3B_2) = P(A_3) \cdot P(B_2/A_2)$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{10}$$

$$= \frac{10}{20}$$

$$\therefore P(B_2) = P(A_1B_2) + P(A_2B_2) + P(A_3B_2)$$

$$= \frac{6}{120} + \frac{12}{120} + \frac{10}{120}$$

$$= \frac{28}{120}$$

B_1, அதாவது சிவப்புப் பந்து எடுக்கப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவை நேரடியாக கணக்கிடாமல் ஒன்றிலிருந்து $P(B_2) + P(B_3)$ என்ற தொகையைக் கழித்து கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம். ஏனெனில் எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாகவும் நீலமாகவும் இல்லையென்ருல் சிவப்பாகத்தான் இருக்க வேண்டும். அதன்படி,

$$P(B_1) = 1 - [\,P(B_2) + P(B_3)\,]$$

$$= 1 - \frac{69}{120}$$

$$= \frac{51}{120}$$

(3) எட்டு ஒரே அளவுள்ள அட்டைகளில் கீழ்க்கண்ட எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ளன. 333, 323, 322, 233, 232, 232, 223, 322. இவைகள் ஒரு பெட்டியில் போடப்பட்டு நன்கு கலக்கப்பட்டு ஒரு அட்டை ராண்டமாக எடுக்கப்படுகிறது. கீழ்க்கண்ட 3 நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை எனக்காட்டு :

A : அட்டையின் முதல் ஸ்தான எண் 3 ஆக இருக்கும்.

B : அட்டையின் 10-வது ஸ்தான எண் 3 ஆக இருக்கும்.

C : அட்டையின் 100-வது ஸ்தான எண் 3 ஆக இருக்கும்.

மொத்தம் உள்ள எட்டு அட்டைகளில் A-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 4. எனவே $P(A) = \frac{4}{8}$

B-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 4. எனவே $P(B) = \frac{4}{8}$

C-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 4. எனவே $P(C) = \frac{4}{8}$

AB-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 2. எனவே P (AB)

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

AC-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 2. எனவே P(AC)

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

BC-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 1. எனவே $P(BC) = \frac{1}{8}$

ABC-க்கு சாதகமான அட்டைகள் 1. எனவே $(ABC) = \frac{1}{8}$

$$P(A), P(B), P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$= P(ABC)$$

$$P(A) . \; P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$= P(AB)$$

$$P(A) . \; P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} = P(AC)$$

$$P(B) . \; P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\neq$ P(BC). எனவே B-யும் C-யும் சார்புள்ளவை.

∴ ABC ஆகிய மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லாத நிகழ்ச்சிகளாயிருப்பதற்குரிய 4 நிபந்தனைகளுள் ஒன்று தான் பூர்த்தி செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக் கொன்று சார்பில்லா நிகழ்ச்சிகள்.

பயிற்சி

1. ஐவர் தனித்தனியே ஒரு பகடையை வீசுகின்றனர்.

(i) ஒவ்வொருவருக்கும் தனித்தனியே 2 கிடைப்பதற்குரிய

(ii) ஒவ்வொருவருக்கும் தனித்தனியே ஒரு இரட்டைப் படை எண் கிடைப்பதற்குரிய

(iii) ஐவருக்கும் ஒரே எண் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

2. 10 நபர்கள் தனித்தனியே ஒரு பிழற்ச்சியற்ற நாணயத்தைச் சுண்டுகின்றனர். ஏதேனும் ஒருவருக்கு மட்டும் தலை கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ? குறைந்தது ஒருவருக்காவது தலை கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

3. A என்பது கூறுவெளி Ωவிலுள்ள ஒரு நிகழ்ச்சியென்றால் Aயும் Ωவும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளா எனக் காண்க. Aயும், ϕயும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளா எனக் காண்க.

4. Aயும், Bயும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளென்றால் A^cம், B^cம் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளா ? Aயும், B^cயும் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளா ?

5. ஒரு கணக்கை A என்பவர் சரியாகப் போட்டு முடிக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$, B என்பவர் சரியாகப் போட்டு முடிக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$. அந்தக் கணக்கை அந்த இருவரிடமும் கொடுத்தால் கணக்கு சரியாகத் தீர்வு காணப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

6. பை I-ல் 4 சிவப்பு 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், பை II-ல் 3 சிவப்பு 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. I-லிருந்து II-ற்கு ராண்டமாக ஒரு பந்து மாற்றப்பட்டது. பின்னர் II-லிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டது. அது வெள்ளையாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

7. மூன்று பீரங்கிகள் ஒரு இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு தனித்தனியே ·5 ஆகும். (i) மூன்றும் இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய (ii) குறைந்தது ஒன்று இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய (iii) ஒன்றுமே இலக்கைத் தாக்காதிருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

8. A, B, C என்ற மூவர் துப்பாக்கி சுடும் போட்டியில் பங்கு கொள்கின்றனர். A என்பவர் இலக்கைச் சுடும் நிகழ்தகவு

$\frac{1}{2}$. B, C-க்கு நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. மூவரும் சுட்டால் (i) குறைந்தது ஒருவராவது இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு (ii) கூடியது ஒருவர் இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

பேயிஸின் தேற்றம் (Baye's Theorem) : A என்ற நிகழ்ச்சி $B_1, B_2 \ldots B_N$ என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஏதேனும் ஒன்ருகிலும் நிகழ்ந்தால் தான் நிகழும். அதாவது $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$. $P(A/B_i)$ $i = 1, 2, 3 \ldots N$ தெரிந்த நிகழ்தகவுகள் அல்லது சுலபமாக கணிக்கக் கூடியவை என்ருல்,

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i).\ P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A/B_i)} \qquad i = 1, 2 \ldots N$$

$$\text{நிரூபணம் : } P(AB_i) = P(A).\ P(B_i/A)$$
$$= P(B_i)\ P(A/B_i)$$

$$\text{எனவே } P(B_i / A) = \frac{P(B_i).\ P(A/B_i)}{P(A)}$$

தேற்றத்தில் உள்ளபடியே தொகுதி (Numerator) உள்ளது.

பகுதி (Denominator) தேற்றத்தில் உள்ள கூட்டுத்தொகை என நிரூபித்தால் தேற்றம் நிரூபணமாகி விடும்.

$\therefore A \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \ldots \cup B_N$, $A = AB_1 \cup AB_2 \ldots \ldots \cup AB_N$ எனவே $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_N)$ $\{AB_1\ AB_2 \ldots AB_N$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால்$\}$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

$$P(AB_i) = P(B_i)\ P(A/B_i)$$

$$\therefore\ P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A/B_i)$$

$$\text{எனவே } P(B_iA) = \frac{P(B_i).\ P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A/B_i)}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ராம் என்பவர் ஒரே வண்ணம் அளவுள்ள இரு பைகள் வைத்துள்ளார். முதற் பையில் 3 வெள்ளை 4 சிவப்பு கோளக் குண்டுகள் உள்ளன. இரண்டாம் பையில் 5 வெள்ளை 3 சிவப்பு கோளக் குண்டுகள் உள்ளன. அவர் ராண்டமாக ஒரு பையைத் தேர்ந் தெடுத்து ராண்டமாக ஒரு கோளக்குண்டை தேர்ந்தெடுத்தார். அது சிவப்பாயிருந்தது. அதனை முதற் பையிலிருந்து தேர்ந்தெடுத் திருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

A : சிவப்பு கோளக்குண்டை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி

B_1 : முதற்பையை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி

B_2 : இரண்டாம் பையை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி

$$P(B_1) = \tfrac{1}{2}$$
$$P(B_2) = \tfrac{1}{2}$$
$$P(A/B_1) = \tfrac{4}{7}$$
$$P(A/B_2) = \tfrac{3}{8}$$

பேயிஸின் தேற்றப்படி. $P(B_1/A) = \dfrac{P(B_1).\quad P(A/B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2} P(B_i)\ P(A/B_i)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\ \frac{4}{7}}{\frac{1}{2}\cdot\ \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\cdot\ \frac{3}{8}}$$

$$= \frac{\frac{4}{14}}{\frac{4}{14} + \frac{3}{16}}$$

$$= \frac{32}{53}.$$

2. மூன்று யந்திரங்கள் I, II, III ஒரே விதமான பொருளை தயாரிக்கின்றன. மூன்றிலிருந்தும் தயாராகும் பொருள்கள் ஒரே குவியலாக்கப்பட்டு விற்கப்படுகின்றன. யந்திரம் I குவியலின் 20 சதவீதப் பொருட்களையும் யந்திரம் II குவியலின் 50 சதவீதப் பொருட்களையும், யந்திரம் III குவியலின் 30 சதவீதப் பொருட்களை

யும் உற்பத்தி செய்கிறது. யந்திரம் I பழுதுடைய பொருளை உற்பத்தி செய்வதற்குரிய நிகழ்தகவு ·01, அதற்கான யந்திரம் II, III-க்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே ·05, ·08. குவியலிலிருந்து ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பொருள் பழுதுடையதாக உள்ளது என்றால் அது யந்திரம் I-ல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

A : பழுதுடைய பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி.

B_1 : முதல் யந்திரம் செய்த பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி.

B_2 : இரண்டாம் யந்திரம் உற்பத்தி செய்த பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி.

B_3 : மூன்றும் யந்திரம் உற்பத்தி செய்த பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி.

$$P(B_1) = \cdot 2$$
$$P(B_2) = \cdot 5$$
$$P(B_3) = \cdot 3$$
$$P(A/B_1) = \cdot 01$$
$$P(A/B_2) = \cdot 05$$
$$P(A/B_3) = \cdot 08$$

பேயிஸின் தேற்றப்படி $P(B_1/A) = \dfrac{P(B_1)\;\; P(A/B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\; P(A/B_i)}$

$$= \frac{\cdot 2 \times \cdot 1}{\cdot 2 \times \cdot 01 + \cdot 025 + \cdot 024}$$

$$= \frac{2}{51}.$$

பயிற்சி

1. கோபால் என்பவர் 1, 2, 3 என்ற எண்களுள் ஒன்றை ராண்டமாக எடுத்து அந்த எண்ணுக்குரிய அத்தனை பகடைகளை வீசுகிறார். இந்த முறையில் பகடைகளின் முகப்பு எண்களின் கூட்டுத்தொகையாக 5 என்ற எண் கிடைக்கிறது என்றால் அவர்

(i) இரண்டு பகடைகளை வீசியதற்கான (ii) மூன்று பகடைகளை வீசியதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

2. தலா இரு இழுப்பு அறைகள் (drawer) உள்ள இரு பெட்டிகளில் ஒன்றில் முதல் அறையில் தங்க மோதிரமும் இரண்டாம் அறையில் வெள்ளி மோதிரமும், இரண்டாவது பெட்டியில் இரு அறைகளிலும் வெள்ளி மோதிரங்களும் உள்ளன. ஒருவர் ராண்டமாக ஒரு பெட்டியை தேர்ந்தெடுத்து ராண்டமாக ஒரு அறையிலிருந்து ஒரு மோதிரத்தை எடுக்கிறார். அது வெள்ளியாக இருக்கிறது என்றால் அந்தப் பெட்டியின் பக்கத்து அறையிலும் வெள்ளி மோதிரம் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

3. ராம் என்பவர் 3 சிவப்பு 2 பச்சைப் பைகள் வைத்துள்ளார். சிவப்பு பைகளில் வெள்ளைப் பந்துகளும் கருப்புப் பந்துகளும் 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. பச்சைப் பைகளில் அவை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவர் ஒரு பையை ராண்டமாக தேர்ந்தெடுத்து அதனின்று ராண்டமாக ஒரு பந்தை எடுக்கிறார். இந்த முறையில் அவர் ஒரு வெள்ளைப் பந்தை எடுத்தார் என்றால் பச்சைப் பையை தேர்ந்தெடுத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

4. முயல்களின் முழுமைத் தொகுதியில் இருவித முயல்கள் உள்ளன. அவை கருமுயல், செம்முயல் ஆவன. கருமுயல்கள் 60 சதவீதமும் செம்முயல்கள் மீதமும் அள்ளன. கருமுயல்களில் 50 சதவீத முயல்களுக்கு சிவப்பு விழிகளும், மீதமுள்ளவற்றிற்கு பழுப்பு விழிகளும் உள்ளன. செம்முயல்களில் 70 சதவீத முயல்களுக்கு சிகப்பு விழிகளும், மீதமுள்ளவற்றிற்கு பழுப்பு விழிகளும் உள்ளன. ராண்டமாக தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு முயல் பழுப்பு விழிகளுடையதாயிருந்தால் அது செம்முயலாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரு பைகளில் முறையே 4 வெள்ளை 5 சிவப்பு பந்துகளும், 3 வெள்ளை 4 சிவப்பு பந்துகளும் உள்ளன. முதற் பையிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து இரண்டாம் பைக்கு மாற்றப்படுகிறது. பின்னர் இரண்டாவது பையிலிருந்து ராண்டமாக ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இது வெள்ளையாக இருந்தால் மாற்றப்பட்ட பந்து வெள்ளையாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

6. ஒரு தொழிற்சாலையில் யந்திர I 40% பொருட்களையும் யந்திரம் II 60% பொருட்களையும் உற்பத்தி செய்கிறது. சராசரியாக யந்திரம் I 100க்கு ஒன்று பழுதுடையதாகவும் யந்திரம் II 100க்கு 2 பழுதுடையதாகவும் உற்பத்தி செய்கிறது. ஒரு நாள் உற்பத்தியில்

ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பொருள் பழுதுடையதாக இருந்தது என்றால் அந்தப் பொருளை முதல் யந்திரம் உற்பத்தி செய்திருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

7. மூன்று பைகளில் உள்ள பந்துகளின் விபரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

	சிகப்பு	வெள்ளை	நீலம்
பை I	3	4	5
பை II	2	2	2
பை III	3	2	3

மூன்று பைகளுள் ஒன்று ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனின்று இரு பந்துகள் ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன. அவை இரண்டும் சிவப்பாயிருந்தன வென்றால் அவை முதற் பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

புதிய பாடத்திட்டப் படியான கேள்விகள்

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

8. ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு (லீப் அல்லாத) வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக் கிழமைகள் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

அ) $\frac{2}{7}$ ஆ) $\frac{29}{365}$ இ) $\frac{1}{7}$ ஈ) $\frac{28}{365}$

9. ஒரு பையில் 7 வெள்ளை 6 சிவப்பு 5 கருப்பு பந்துகள் உள்ளன. ஒரு பந்து ராண்டமாக தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. பந்து சிவப்பாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

அ) $\frac{7}{18}$ ஆ) $\frac{5}{18}$ இ) $\frac{1}{3}$ ஈ) $\frac{6}{11}$

10. இரு பகடைகளை வீசும்போது அவற்றின் முகப்பிலுள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை 6 ஆக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

அ) $\frac{3}{36}$ ஆ) $\frac{5}{36}$ இ) $\frac{11}{36}$ ஈ) $\frac{12}{36}$

11. நிகழ்தகவு வெளியில் நிகழ்ச்சி கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

அ) நிகழ்தகவு வெளியின் துணைக் கணம்.

ஆ) நிகழ்தகவு வெளியின் மறுதலைக் கணம்.

இ) பூஜ்யக் கணத்தின் மறுதலைக் கணம்.

ஈ) Ω

12. x மொத்த ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளுடைய ஒரு நிகழ்தகவு வெளியில் m ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமாயிருந்தால் அந்த நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு :

அ) $\frac{m}{m+n}$ ஆ) $\frac{m}{n}$ இ) $\frac{m}{m-n}$ ஈ) $\frac{n}{m}$.

13. Aயும் Bயும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ என்றிருந்தால் $P(A \cup B)=$ அ) $\frac{1}{6}$ ஆ) $\frac{1}{8}$ இ) $\frac{6}{8}$ ஈ) $\frac{5}{8}$.

14. A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$ என்றிருந்தால் $P(AB)$ இன் மதிப்பு அ) $\frac{1}{12}$ ஆ) $\frac{2}{3}$ இ) $\frac{1}{3}$ ஈ) $\frac{1}{6}$.

15. $P(A/B)$ வரையறுக்கப்படுவதற்கு.

அ) $P(A) > 0$ ஆ) $P(B) > 0$ இ) $P(AB) \geq 0$ ஈ) $P(A \cup B) \geq 0$.

16. A, B, C ஆகிய 3 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் $P(A \cup B \cup C)$ இன் வாய்ப்பாட்டில் உள்ள உறுப்புகள் (terms).

அ) 4 ஆ) 5 இ) 6 ஈ) 7.

2. ராண்டம் மாறிகள்

(RANDOM VARIABLES)

ஒரு பகடையை வீசினால் என்ன எண் கிடைக்கும்? பிழற்சி யற்ற நாணயத்தைச் சுண்டினால் தலை கிடைக்குமா? பூ கிடைக்குமா? பிறக்கப் போகும் குழந்தை ஆணா? பெண்ணா? இதுபோன்ற கேள்விகளுக்கு சரியான விடையளிக்க இயலாது. ஏனெனில் நடக்க விருக்கும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியுடனும் ஒவ்வொரு நிகழ்தகவு இணைந் திருக்கும். ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்கும் தனித்தனியான நிகழ் தகவு உண்டு. எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியையும் உறுதியாக நடக்கும் அல்லது உறுதியாக நடக்காது எனக் கூற இயலாது.

ராண்டம் மாறி (Random Variable) இங்கு தான் பயன்படு கிறது. இதனை வாய்ப்பு மாறி (Chance Variable) ஸ்டொகாஸ்டிக் மாறி (Stochastic Variable) எனவும் குறிப்பிடலாம். சரிசம வாய்ப்பு மாறி குறிப்பிட்ட மெய்யெண்களை (Real Number) குறிப்பிட்ட நிகழ் தகவுகளுடன் எடுக்கும். அது எடுக்கும் எல்லா மெய்யெண்களுக் குரிய நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும். எனவே ராண்டம் மாறியை நிகழ்தகவு வெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு மெய்யெண் சார்பு எனலாம். நிகழ்தகவு வெளியில் உள்ள ஒவ் வொரு ஆரம்ப நிகழ்ச்சிக்கும் சரிசம வாய்ப்பு மாறி ஒவ்வொரு மெய் யெண்ணை வரையறுக்கிறது.

ஒரு பகடையை வீசும் சோதனையில் X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி பகடையின் முகப்பில் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கட்டும். இங்கு X எடுக்கும் மெய்யெண்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6. X இங்குள்ள மெய் யெண்களை எடுக்க நிகழ்தகவு முறையே ஒன்வொன்றிற்கும் $\frac{1}{6}$ ஆகும். ஒரு சீரான நாணயம் ஒன்றை சுண்டினால் கிடைக்கும் ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் தலை, பூ. இந்த நிகழ்தகவு வெளியில் சரிசம வாய்ப்பு மாறியை வரைய ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளுடன் X–ன் மெய் யெண்களை இணைக்க வேண்டும். $X=1$ என்ற மதிப்பு தலை கிடைக் கும் ஆரம்ப நிகழ்ச்சியையும் $X=0$ என்ற மதிப்பு பூ கிடைக்கும்

ஆரம்ப நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கட்டும். இங்கு $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

ராண்டம் மாறி நிகழ்தகவு வெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு ஆரம்ப நிகழ்ச்சிக்கும் ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணை வரைகிறது. இரண்டு அல்லது மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் ஒரே மெய்யெண் இருக்கலாம். எனவே ராண்டம் மாறி நிகழ்தகவு வெளிக்கு இணையாக ஒரு பரிமாண நேர்கோட்டின் (Real line) பல மெய்யெண்கள் அடங்கிய வெளியை உருவாக்குகிறது. நிகழ்தகவு வெளியில் புள்ளிகள் எல்லாம் மெய்யெண்களாக இருக்கத் தேவையில்லை. ஆனால் X–ன் வெளியில் எல்லாப் புள்ளிகளும் மெய்யெண்களாகத்தான் இருக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக சீரான நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி (T, H) ஆகும். அது X–ன் வெளியாக மாறும்போது (0, 1) என மெய்யெண்கள் உள்ள வெளி யாக மாறுகிறது. ஆரம்ப நிகழ்ச்சி T-க்கு இணையாக '0' என்ற மெய்யெண்ணும், H என்ற ஆரம்ப நிகழ்ச்சிக்கு இணையாக 1 என்ற மெய்யெண்ணும் X-ன் வெளியில் உள்ளன.

தொடர்ச்சியற்ற ராண்டம் மாறி (Discrete Random Variable) : குறிப்பிட்ட திட்டமான இடைவெளியில் திட்டமான (finite) மதிப்பு களை எடுக்கும் அல்லது அனந்த இடைவெளியில் எண்ணத்தக்க (countable) அனந்த மதிப்புகள் எடுக்கும் ராண்டம் மாறி தொடர்ச்சி யற்ற ராண்டம் மாறியெனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : ஒரு பகடையை வீசும் சோதனையில் X : பகடையின் முகப்பில் கிடைக்கும் எண் என்ற மாறியானல், X திட்டமான இடைவெளி [1, 6] இல் திட்டமான மதிப்புகள் (6) எடுக்கின்றன. திரும்பத் திரும்ப நடை பெறும் முயற்சிகளடங்கிய சோதனையில் முதல் வெற்றியை முந்திய முயற்சிகள் என்ற ராண்டம் மாறி அனந்தம் மதிப்புகள் எடுப்பதாகும். X என்பது அத்தகைய மாறியென்றால் X-ன் மதிப்புகள் $0, 1, 2, \ldots \infty$ ஆகும். ஏனெனில் முதல் முயற்சியே வெற்றியாயிருக்கலாம் $(X = 0)$. அல்லது முதல் முயற்சி தோல்வியாகவும் இரண்டாவது வெற்றியாகவும் இருக்கலாம் $(X = 1)$. இதுபோல் $X = \infty$ வரை மதிப்புகள் எடுக்கும்.

தொடர்ச்சியற்ற ராண்டம் மாறி X, $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மதிப்பு களை முறையே $p_1, p_2 \ldots p_n$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுப்பதாகக் கொள்வோம்.

$f(x) = P[X=x]$ என்றிருக்கட்டும். $f(x)$, X இன் அலைவெண் சார்பு (frequency function) அல்லது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (probalility density function) எனப்படுகிறது. X தொடர்ச்சியற்ற

ராண்டம் மாறியென்றால் f(x) ஒரு நிகழ்தகவு ($P[X = x]$) ஆகிறது. f(x) இன் பண்புகள் கீழ் வருமாறு :

(i) $f(x) 0 \geq$ இது ஒரு நிகழ்தகவாகையால் இது உண்மையாகிறது.

(ii) $\sum_{x} f(x) = 1$. f(x) ஐ x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கூட்டினால் ஒன்றாகும். x என்பது X எடுக்கும் மதிப்புகளாகும். X எடுக்கும் எல்லா மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்தகவை கூட்டும்போது உறுதியான நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு ஆவதால் நிகழ்தகவு ஒன்றாகிறது.

(iii) $P[X \in A] = \sum_{X \in A} f(x)$. A என்பது பல மெய்யெண்கள் சேர்ந்த ஒரு கணமாகும்.

நிகழ்தகவுப் பரவல் : X என்ற தொடர்ச்சியற்ற மாறி எடுக்கும் மதிப்புகளும் அவற்றின் நிகழ்தகவுகளும் பட்டியலாக அமைக்கப்பட்டால் அது X இன் நிகழ்தகவுப் பரவல் எனப்படுகிறது. அது கீழ்க்கண்டவாறிருக்கும்.

x	f (x)
x_1	p_1
x_2	p_2
.	
.	
.	
x_n	p_n
கூடுதல்	1

குவிவுப்பரவல் சார்பு (Cumulative distribution function) : X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற ராண்டம் மாறியென்றால் $P[X \leq x)$ X இன் குவிவுப் பரவல் சார்பு எனப்படுகிறது. இது $F(x) = P[X \leq x]$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$F(x) = P(X \leq x)$$
$$= \sum_{t \leq x} f(t)$$

F(x) கீழ்க்கண்ட பண்புகள் உடையதாயிருக்கும்.

(i) $F(\infty) = 1$

(ii) $F(-\infty) = 0$

(iii) F (x) என்பது குறையும் சார்பல்ல. அதாவது $a \geq b$ என்ருல் $F(a) \geq F(b)$.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள்

1) கீழ்க்கண்ட X இன் நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து Kயின் மதிப்பைக் காண்க.

x	f(x)
1	·1
2	·2
3	K
4	2K
5	·1

விடை: அது ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலாதலால் f(x) ஐ x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கூட்டிஞல் ஒன்ருக இருக்க வேண்டும். இதன்படி $\cdot 4 + 3k = 1$.

$$3k = 1 - \cdot 4$$
$$= \cdot 6$$
$$k = \cdot 2$$

2) கீழ்க்கண்ட X இன் நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து குறித்துள்ள நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) $P[X > 2]$ (ii) $P[1 < X < 5]$

(iii) $P[X \leq 4]$ (iv) $P[X \geq 2]$

x	f (x)
1	·05
2	·1
3	·1
4	·01
5	·08
6	·01
7	·05
8	·2
9	·2
10	·2

(i) $[X > 2]$ என்ற இடைவெளியில் $X = 1, 2$ என்ற மதிப்புகளை தவிர மீதி அனைத்தும் உள்ளன. எனவே

$$\begin{aligned} P[X > 2] &= 1 - \{ P(X = 1) + P(X = 2) \} \\ &= 1 - \{ \cdot 05 + \cdot 1 \} \\ &= 1 - \cdot 15 \\ &= \cdot 85 \end{aligned}$$

(ii) $[1 < X < 5]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள X-ன் மதிப்புகள் 2, 3, 4 ஆகும். எனவே

$$\begin{aligned} P[1 < X < 5] &= P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] \\ &= \cdot 1 + \cdot 1 + \cdot 01 \\ &= .21 \end{aligned}$$

(iii) $[X \leq 4]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள X-ன் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4 ஆகும். எனவே

$$\begin{aligned} P[X \leq 4] &= P[X = 1 + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] \\ &= \cdot 05 + \cdot 1 + \cdot 1 + \cdot 01 \\ &= \cdot 26 \end{aligned}$$

விடை : (iv) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \cdot 05 \\ &= \cdot 95 \end{aligned}$$

3. கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து X-ன் குவிபுப் பரவல் சார்பை கணிக்கவும்

x	f(x)
0	·05
1	·10
2	·10
3	·16
4	·10
5	·10
6	·04
7	·20
8	·15

விடை: x	f(x)	$F(x) = P(X \leq x)$
0	·05	·05
1	·10	·15
2	·10	·25
3	·16	·41
4	·10	·51
5	·10	·61
6	·04	·65
7	·20	·85
8	·15	1·00

மூன்றாவது பத்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகள் பரவல் சார்பின் மதிப்புகளாகும்.

4. கீழ்க்கண்ட X-ன் பரவல் சார்பிலிருந்து X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கணக்கிடுக.

x	F(x)
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{5}{6}$
6	1

விடை : கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிலிருந்து X எடுக்கும் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 எனத் தெரிகிறது. பரவல் சார்பிலிருந்து X இந்த மதிப்புகள் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவை கணக்கிட வேண்டும்.

$$P(x = 1) = P(x \leq 1) \quad \text{[x ஒன்றுக்கு கீழே எந்த மதிப்பும் எடுக்காததால்]}$$
$$= F(1)$$
$$= \tfrac{1}{6}$$
$$P(x = 2) = P(x \leq 2) - P(x \leq 1)$$
$$= F(2) - F(1)$$
$$= \tfrac{2}{6} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}$$
$$P(x = 3) = F(3) - F(2)$$
$$= \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6}$$
$$= \tfrac{1}{6}$$

$$
\begin{aligned}
P\ (x = 4) &= F\,(4) - F\,(3) \\
&= \tfrac{4}{6} - \tfrac{3}{6} \\
&= \tfrac{1}{6} \\
P\ (x = 5) &= \tfrac{5}{6} - \tfrac{4}{6} \\
&= \tfrac{1}{6} \\
P\ (x = 6) &= F\,(6) - F\,(5) \\
&= 1 - \tfrac{5}{6} \\
&= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

எனவே X இன் நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும்.

x	f(x)
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
கூடுதல்	1

தொடர் ராண்டம் மாறி (Continuous Random Variable) : X என்ற ராண்டம் மாறி குறிப்பிட்ட திட்டமான இடைவெளியில் கூட அனந்தம் அல்லது எண்ணிலடங்கா மதிப்புகளை எடுக்குமானால் அது தொடர் ராண்டம் மாறியெனப்படுகிறது. எடுத்துக் காட்டாக X என்பது ஒரு மனிதனின் உயரம் (சென்டிமீட்டரில்) என்றால் அது 150 முதல் 180 வரை எந்த மதிப்பையும் எடுக்கலாம். இத்தகைய மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல் (Continuous Probability distribution) எனப்படுகிறது. X என்னும் தொடர் ராண்டம் மாறி $\left(x - \frac{dx}{2}, \ x + \frac{dx}{2}\right)$ என்ற மிகச்சிறிய இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு f(x) dx என்றிருந்தால் f(x) எனும் தொடர் சார்பு X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனப்படுகிறது. X என்ற தொடர் ராண்டம் மாறி x என்ற தனி மதிப்பை எடுக்கும் நிகழ்தகவு என எப்போதும் குறிப்பிடுவதில்லை. தொடர் ராண்டம் மாறிகளுக்கு இடைவெளிகளுக்குத்தான் நிகழ்தகவுகள் கணக்கிடப்படும். தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளைப் போன்று X = x என்ற தனி மதிப்புகளுக்கு நிகழ்தகவு கணக்கிடக் கூடாது.

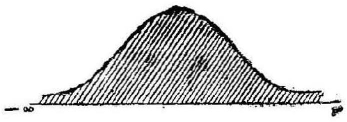
நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் பண்புகள் :

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $P[a < X < b] = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

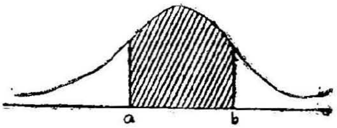
(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

f (x)-ன் வளையை வரைந்தால் அந்த வளைக்கும் x-அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு ஒன்றாகும்.



படம் 2.

$P[a < X < b]$ என்ற நிகழ்தகவை கீழ்க்கண்டவாறு f(x)-ன் வளை வரையின் பரப்பாகவும் காட்டலாம்.



படம் 3.

கோடிட்ட பரப்பு குறிப்பிடப்பட்ட நிகழ்தகவாகும்.

குவிவுப்பரவல் சார்பு : தொடர்ச்சியற்ற மாறியைப் போன்றே தொடர் மாறிக்கும் பரவல் சார்பு வரையப்படுகிறது. X என்பது ஒரு தொடர் மாறியாகவும் அதன் அடர்த்திச் சார்பு f(x) ஆகவும் இருந்தால் குவிவுப் பரவல் சார்பு F(x), X x-க்கு குறைவான அல்லது சமமான மதிப்புகளை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது $F(x) = P[X \leq x]$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$F(x)$ கீழ்க்கண்ட பண்புகளுடையவையாயிருக்கும்.

(i) $F(-\infty) = 0$

(ii) $F(\infty) = 1$

(iii) $\frac{dF}{dx} = f(x).$

(iv) $P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

(v) $F(x)$ வலப்பக்க தொடர்ச்சியுள்ளதாக அதாவது $F(x + 0) = F(x)$ என்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = K\, e^{-x},\ x > 0$ என்றால் K-யின் மதிப்பைக் காண்க.

விடை : $f(x)$ ஒரு அடர்த்திச் சார்பு ஆதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ என இருக்கும்}$$

இங்கு $f(x)$ $(0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் தான் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே $(-\infty, 0)$ என்ற இடைவெளியில் இதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

$$\text{எனவே} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\infty} K\, e^{-x}\, dx$$

$$= 0 + \left[-K\, e^{-x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= 0 - K\,[0 - 1]$$

$$= K$$

f(x) ஓர் அடர்த்திச் சார்பாதலால் அதன் பண்பின் பிடி K ஒன்ருக இருக்க வேண்டும். எனவே K = 1

2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட சார்பு ஒரு அடர்த்திச் சார்பா எனக் காண்க.

$$f(x) = \frac{1}{16}(3+x)^2 \qquad -3 \le x \le -1$$

$$= \frac{1}{16}(6-2x^2) \qquad -1 \le x \le 1$$

$$= \frac{1}{16}(3-x)^2 \qquad 1 \le x \le 3.$$

விடை : f(x)-இன் முக்கியமான பண்புகள்

(i) $f(x) \ge 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

கொடுக்கப்பட்ட f(x) முதற்பண்பை பூர்த்தி செய்கிறது. இரண்டாவது பண்பு பூர்த்தியாகிறதா என சோதிக்க வேண்டும்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{16}\left[\int_{-3}^{-1}(3+x)^2 dx + \int_{-1}^{1}(6-12x+4x^2)dx + \int_{1}^{3}(9-6x+x^2)dx\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(9x+\frac{6x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{-1} + \left(6x-12\frac{x^2}{2}+4\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1} + \left(9x-\frac{6x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)_{1}^{3}\right]$$

$$= \frac{1}{16} \times 16$$

$$= 1$$

எனவே f(x) ஒரு அடர்த்திச் சார்பு ஆகும்.

3. ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = c$ $0 \leq x \leq 2$ என்றால் c-ஐ கணக்கிட்டு X ·5ற்கும் 1·5ற்கும் இடையில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவையும் X ஒன்றுக்கு மேல் மதிப்பை எடுக்க நிகழ்தகவையும் கணக்கிடுக.

விடை : f(x) அடர்த்திச் சார்பென கொடுக்கப் பட்டிருப்பதால்

$\int_0^2 f(x)\, dx = 1$ என இருக்க வேண்டும்.

$$\text{அதாவது} \int_0^2 c\, dx = 1$$

$$c\,[x]_0^2 = 1$$

$$c \times 2 = 1$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

$$P\,[\cdot 5 < X < 1\cdot 5] = \int_{\cdot 5}^{1\cdot 5} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\cdot 5}^{1\cdot 5} dx$$

$$= \frac{1}{2}\,[x]_{\cdot 5}^{1\cdot 5}$$

$$= \frac{1}{2}\,[1]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$P\,[x > 1] = \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\, dx + \int_{2}^{\infty} 0\, dx$$

$$= \frac{1}{2} [x]_{1}^{2} + 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

4. ஒரு தொடர் மாறியின் அடர்த்தி சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் பரவல் சார்பை கணிக்கவும்.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -a \\ \frac{(a+x)}{a^2} & -a < x \leq 0 \\ \frac{(a-x)}{a^2} & 0 < x \leq a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

விடை: $F(x) = P(x \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

x, — a விற்கும் குறைவாக இருக்கும்போது $F(x) = 0$
$-a < x \leq 0$ என்றிருக்கும்போது

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} f(t)\, dt + \int_{-a}^{x} f(t)\, dt$$

$$= 0 + \int_{-a}^{x} \frac{a + t^2}{a^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[at + \frac{t^2}{2}\right]_{-a}^{x}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[a(x+a) + \tfrac{1}{2}(x^2 - a^2)\right]$$

$$= \frac{ax + x^2/2 + a^2/2}{a^2}$$

$0 < x \leq a$ என்றிருக்கும்போது

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} f(t)\,dt + \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_{-a}^{0} \frac{a+t}{a^2}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{a-t}{a^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[at + \frac{t^2}{2}\right]_{-a}^{0} + \frac{1}{a^2}\left[at - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{ax - x^2/2}{a^2}$$

$x > a$ என்றிருக்கும்போது

$$F(x) = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-a}^{0} \frac{(a+t)}{a^2}\,dt + \int_{0}^{a} \frac{a-t}{a^2}\,dt + 0$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$= 1$$

$$
\text{எனவே}\quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -a \\ \dfrac{a x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}}{a^2} & -a < x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{a x - x^2/2}{a^2} & 0 < x \le a \\ 1 & x > a \end{cases}
$$

5. ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறியின் பரவல் சார்பு

$$
F(x) = \begin{cases} K_1 & x \le 1 \\ K_2 (x-1)^4 & 1 < x \le 3 \\ K_3 & x > 3 \end{cases}
$$

என்றால் K_1, K_2, K_3 ஆகிய நிலையெண்களின் மதிப்பைக் காண்க.

விடை : F (x) ஒரு பரவல் சார்பாதலால்

$$F(-\infty) = 0$$

$$\text{அதாவது}\quad F(-\infty) = 0 = K_1$$

$$\text{எனவே}\quad K_1 = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

$$\text{அதாவது}\quad F(\infty) = 1 = K_3$$

$$\text{எனவே}\quad K_3 = 1$$

$$f(x) = F'(x) = 4 K_2 (x-1)^3 \qquad 1 < x \le 3$$

$$= 0 \qquad \text{மற்ற } x \text{ மதிப்புகளுக்கு}$$

$\int_{\infty}^{\infty} f(x) = 1$ என்பது f(x) இன் பண்பாகும்

$$\text{எனவே}\quad 4 K_2 \int_1^3 (x-1)^3 \, dx = 1$$

$$\text{அதாவது}\quad 4 K_2 \left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_1^3 = 1$$

$$,,\qquad 4 K_2 [4 - 0] = 1$$

$$\therefore\quad K_2 = \tfrac{1}{16}$$

எனவே $K_1 = 0 \quad K_2 = \frac{1}{16} \quad K_3 = 1$ ஆகும்

பயிற்சி

1. ஒரு தொடர்ச்சியற்ற ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	a	3a	5a	7a	9a	11a	13a	15a	17a

(i) aயின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $P(X > 2)$ $P(X \leq 3)$ $P(3 < X < 7)$ ஆகிய நிகழ்தகவுகளை கணக்கிடுக.

(iii) X இன் குவிவுப் பரவல் சார்பைக் காண்க.

2. கீழ்க் கண்ட நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து c-யின் மதிப்பைக் கண்டு பிடித்து ராண்டம் மாறியின் பரவல் சார்பைக் காண்க.

x	f(x)
10	0
12	c
14	2c
16	3c
18	4c
20	c^2
22	$3c^2$
24	$5c^2 + c$
26	$7c^2 + c + 2$
28	c

3. X என்ற ராண்டம் மாறிக்கு கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுப் பரவல் உள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} K & x = 0 \\ 2K & x = 1 \\ 3K & x = 2 \\ 0 & x \text{ இன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) K-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $X > 0$ என்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) $P(X \leq x) < \cdot 4$ என்ற சமமின்மையை பூர்த்தி செய்யும் மிகச் சிறிய x இன் மதிப்பைக் காண்க.

4. ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பின் பண்புகளை வரைந்து கீழ்க்கண்ட சார்பு ஒரு அடர்த்திச் சார்பா எனக் காண்க.

$$f(x) \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{x-ன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

5. X என்ற தொடர் ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} Kx & 0 \leq x \leq 1 \\ K & 1 \leq x \leq 2 \\ -Kx + 3K & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{x-ன் பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) K-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) இதற்குரிய F(x) ஐ கணிக்கவும்.

6. X என்ற ராண்டம் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \frac{K}{1+x^2} \qquad -1 \leq x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{x-ன் பிற மதிப்புகளுக்கு}$$

(i) K ஐ கணிக்கவும்.

(ii) $P(X \geq 0)$ ஐக் காண்க.

7. X என்ற தொடர் ராண்டம் மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F(x) = K_1 \qquad x < 0$$

$$= K_2 + K_3 e^{-x} \qquad x \geq 0$$

என்றால் K_1 K_2 K_3 ஐ கணிக்கவும். X, 0 விற்கும் இரண்டிற்கும் இடையே அமைவதற்கான நிகழ்தகவை கணக்கிடவும்.

8. X என்ற தொடர் ராண்டம் மாறியின் பரவல் சார்பு

$$F(x) = K_1 \qquad x < 0$$
$$= K_2 + K_3 (1+x)e^{-x} \quad x \geq 0$$

என்றால் K_1 K_2 K_3 ஐக் கணக்கிடவும்.

9. $F(x) = 0 \qquad x \leq 0$

$$= \frac{x^2}{25} \qquad 0 < x \leq 5$$
$$= 1 \qquad x > 5$$

என்றால் f (x) ஐக் காண்க.

10. X என்ற வாய்ப்பு மாறி —1, 0, 1 ஆகிய மதிப்புகளை முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுக்கிறது என்றால் F(0)-ன் மதிப்பு

(அ) $\frac{5}{6}$ (ஆ) $\frac{3}{4}$ (இ) $\frac{1}{6}$ (ஈ) $\frac{1}{2}$

11, X என்ற வாய்ப்பு மாறி 1, 2, 3 ஆகிய மதிப்புகளை முறையே $\frac{1}{3}$, c, 2c என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுத்தால் c-ன் மதிப்பு

(அ) $\frac{1}{9}$ (ஆ) $\frac{2}{9}$ (இ) $\frac{3}{9}$ (ஈ) $\frac{4}{9}$

12. X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = c\,x \qquad 0 < x < 1$

$= 0$ மற்றபடி

என்றால் c-ன் மதிப்பு

(அ) 1 (ஆ) 3 (இ) 2 (ஈ) 4

13. 12-ல் குறித்த பரவலின், பரவல் சார்பு

(அ) $c\,x$ (ஆ) $\frac{c\,x^2}{2}$ (இ) $\frac{c\,x}{2}$ (ஈ) $\frac{c\,x^3}{3}$

14. X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறி 0 – 5 என்ற இடைவெளிக்குள் வரையறுக்கப்பட்டால் அதன் பரவல் சார்பு F (x) இன் மதிப்பு 6 என்ற x இன் மதிப்பிற்கு

அ) பூஜ்ஜியமாயிருக்கும் ஆ) $\frac{1}{2}$ யாக இருக்கும்

இ) $\frac{3}{4}$ ஆக இருக்கும் ஈ) ஒன்றாக இருக்கும்

3. பலதரமாறிப் பரவல்கள்

(MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS)

சென்ற அத்தியாயத்தில் ஒற்றை மாறிப் பரவல்களை (Univariate Distributions)ப் பற்றி பார்த்தோம். இப்போது ஒன்றுக்கு மேற் பட்ட ராண்டம் மாறியின் பரவல்களைப் பற்றி பார்ப்போம். முதலில் தொடர்ச்சியற்ற ராண்டம் மாறிகளின் பரவலைப் பற்றி பார்ப்போம். முதலில் இரு மாறிகள் X, Y ஆகியவற்றைப் பற்றி தெரிந்து கொண் டால் பின்னர் அதையே n மாறிகளுக்கான பொது முறையாக விரித்துக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக இரு பகடைகளை வீசும் சோதனையை எடுத்துக் கொள்வோம். கூறுவெளியில் 36 புள்ளிகள் இருக்கும். X என்பது முதற்பகடையில் கிடைக்கும் எண்ணுகவும் Y இரண்டாம் பகடையில் கிடைக்கும் எண்ணுகவும் இருக்கட்டும். X எடுக்கும் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6; Y எடுக்கும் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகும். இரண்டும் இணைந்து 36 மதிப்புகள் எடுக்கும். இந்த 36 மதிப்புகளுக்கான நிகழ்தகவுகளை பட்டியலாக அமைத்தால் அதை X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் (Joint probability distribution) என்கிறோம். இங்கு X, Y-ன் கூட்டு நிகழ் தகவுப் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும்.

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

X எடுக்கும் மதிப்புகளை x ஆகவும் Y எடுக்கும் மதிப்புகளை y ஆகவும் குறித்தால் $f(x, y) = P[X = x, Y = y]$, X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பு (Joint probability function) எனப்படுகிறது. ஒரு மாறியில் இருந்ததைப் போலவே தொடர்ச்சி மாறிகளுக்குத் தான் இந்த உண்மை பொருந்தும். கூறுவெளியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் இணையாக X Y என்ற ராண்டம் மாறிகள் மெய்யெண்களால் ஆன மற்றொரு வெளியை உருவாக்கும். இது ஒரு இரு பரிமாண வெளியாகும். கூறுவெளியின் புள்ளிகள் மெய்யெண்களாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால் X, Y-ன் வெளி மெய்யெண்களாகத்தான் இருக்க வேண்டும். இந்த வெளியில் ஒவ்வொரு பரப்பும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். $\{a < x < b, c < y < d\}$ ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்; $\{x < a, y < d\}$ ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்.

ஓரப் பரவல் (Marginal distribution) : X = a என்ற நிகழ்ச்சி $\{X = a, Y = y\}$ என்ற y-ன் எல்லா மதிப்புகள் நிகழும் போதும் நிகழும். எனவே X = a என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண X = a என்ற வரிசையிலுள்ள எல்லா நிகழ்தகவுகளையும் கூட்ட வேண்டும். இதே போன்று X-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் அவற்றுக்குரிய நிகழ்தகவையும் கணக்கிட்டு பட்டியலாக்கினால் அது X-ன் ஓரே நிகழ்தகவுப் பரவல் (Marginal probability distribution) எனப்படும். இந்த நிகழ்தகவுப் பரவலின் பரவல் சார்பு ஓரப் பரவல் எனப்படும். இதே போன்று Y = b என்ற நிகழ்ச்சி, $\{X=x, Y=b\}$ என்ற நிகழ்ச்சி x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் நிகழும்போது நிகழும். எனவே Y = b என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண Y = b என்ற பத்தியிலுள்ள எல்லா நிகழ்தகவுகளையும் கூட்ட வேண்டும். இதே போன்று Y-ன் எல்லா மதிப்புகளையும் அவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளையும் கணக்கிட்டுப் பட்டியலாக்கினால் அது Y-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவல் (Marginal probability distribution of Y) எனப்படும். இந்த நிகழ்தகவுப் பரவலின் பரவல் சார்பு Y-ன் ஓரப் பரவல் எனப்படும்.

நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் (Conditional Distribution): நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு பற்றி ஏற்கனவே தெரியும். அந்த வரையறையை பயன்படுத்தி நிபந்தனைப் பரவல் வரையப்படுகிறது.

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$ எனத் தெரியும்.

A-க்கு பதிலாக X = x என்ற நிகழ்ச்சியையும் B-க்கு பதிலாக Y = y என்ற நிகழ்ச்சியையும் எடுத்துக் கொண்டால்

$$P(x = x/Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$ எனக் கிடைக்கும்.

இந்த நிகழ்தகவு திட்டமானதாயிருப்பதற்குரிய நிபந்தனை P(Y = y) பூஜ்ஜியமாயிருக்கக்கூடாது. இதில் y-க்கு ஒரே மதிப்பு கொடுத்து நிலையெண்ணுகை எடுத்துக் கொண்டு x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிட்டு x-ன் மதிப்புகளையும் நிகழ்தகவுகளையும் பட்டியலாக்கினால் X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுப்பரவல் (Conditional probability distribution of X given Y = y) கிடைக்கும். இதற்குரிய பரவல் சார்பைக் கணக்கிட்டால் X-ன் நிபந்தனைக் குட்பட்ட பரவல் (Conditional distribution of X) கிடைக்கும். இதே போன்று X = x கொடுக்கப்பட்டு Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவலைக் காண மேற்குறித்த முறையே பயன்படுத்தப்படுகிறது. முதலில் P(Y = y / X = x) என்ற நிகழ்தகவு y-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கணக்கிடப்படுகின்றன. y-ன் மதிப்புகளும் இந்த நிகழ்தகவுகளும் பட்டியலாக்கப்பட்டு Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவல் கணக்கிடப்படுகிறது. இதிலிருந்து Y-ன் பரவல் சார்பு கணக்கிடப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

1. இரு பகடைகளை வீசும் சோதனையில் X முதற்பகடையின் எண்ணையும் Y இரண்டாம் பகடையின் எண்ணையும் குறித்தால் X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. பரவலிலிருந்து X-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவலையும் Y-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவலையும் காண்க. X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாதிரிகளா எனக்காண்க.

விடை : முன்னரே கண்டு பிடித்தபடி X, Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும்.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	கூடுதல்
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
கூடுதல்	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

X-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவல் :

x	$f_1(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
கூடுதல்	1

இதே போன்று Y-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவல் :

y	$f_2(y)$
1	1/1
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
கூடுதல்	1

X-ம் Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளென்றால்

$P[X = x] \times P[Y = y] = P[X = x, Y = y]$ என்ற சமன்பாடு எல்லா x, y மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாயிருக்கும். இங்கு $x = 1$,

$y = 1$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $P[X = 1] = \frac{1}{6}$ $P[y = 1] = \frac{1}{6}$ $P[X = 1, y =] = \frac{1}{36}$ எனவே $P[X = 1] \times P[y = 1] = P[X = 1, Y = 1]$ இந்தச் சமன்பாடு x, y-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கு உண்மையாதலால் X-ம், Y-ம் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள்.

2. ஒரு பையில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இதிலிருந்து ராண்டமாக இரு பந்துகள் எடுக்கப்பட்டன. X என்ற ராண்டம் மாறி எடுக்கப்பட்ட சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையையும் Y என்ற ராண்டம் மாறி எடுக்கப்பட்ட வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையையும் குறித்தால், X, Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. இதினின்று X, Y ஓரப் பரவல்களையும், $Y = 0$ கொடுக்கப்பட்டு X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவலையும் காண்க.

விடை : X எடுக்கும் மதிப்புகள் 0, 1, 2. இதே போன்று Y எடுக்கும் மதிப்புகள் 0, 1, 2.

$P(X = 0, Y = 0) = 0$ ஏனெனில் எடுக்கப்பட்ட இரு பந்துகளில் ஒன்றுகூட சிவப்பில்லாமலும் ஒன்றுகூட வெள்ளையில்லாமலும் இருக்க முடியாது. எனவே இந்த நிகழ்ச்சி நடக்க இயலாத ஒன்று.

$P(X = 1, Y = 0) = 0$. எடுக்கப்பட்ட இரு பந்துகளில் ஒன்று சிவப்பு மற்றது வெள்ளையில்லாதது (சிவப்புமில்லாதது) என்ற நிகழ்ச்சியை $X = 1, Y = 0$ குறிக்கிறது. இதுவும் நடக்க இயலாது.

$P(X = 2, Y = 0)$ என்பது எடுக்கப்பட்ட இரு பந்துகளில் 2 சிவப்பு பந்துகளும் 0 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ள நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கிறது. இது நடக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சி. எனவே $P(X = 2, Y = 0) = \frac{3c_2}{5c_2} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$.

$(X = 1, Y = 0)$ என்பது 1 சிவப்பு 0 வெள்ளை எடுப்பதை குறிக்கிறது. இது நடக்கவியலாத நிகழ்ச்சி. எனவே, $P(X = 1, Y = 0) = 0$

$(X = 1, Y = 1)$ என்பது 1 சிவப்பு 1 வெள்ளைப் பந்துகளை எடுப்பதைக் குறிக்கிறது. இது சாத்தியமான ஒரு நிகழ்ச்சி

$$\text{எனவே } P(X = 1, Y = 1) = \frac{3 \times 2}{5c_2} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$(X = 1, Y = 2)$ என்பது எடுக்கப்பட்ட பந்துகளில் 1 சிவப்பு 2 வெள்ளைப் பந்துகள் உள்ள நிகழ்ச்சியை குறிக்கிறது. மொத்தமே இரு பந்துகள் எடுப்பதால் இது சாத்தியப்படாத நிகழ்ச்சி. எனவே $P(X = 1, Y = 2) = 0$.

(X = 0, Y = 2) என்பது 0 சிவப்பு 2 வெள்ளைப் பந்துகளை எடுப்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{2c_2}{5c_2} = \frac{1}{10}$$

(X = 1, Y = 2), (X = 2, Y = 2) நடக்கவியலாத நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன. எனவே அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் பூச்சியமாகும். X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X \ Y	0	1	2	கூடுதல்
0	0	0	1/10	1/10
1	0	6/10	0	6/10
2	3/10	0	0	3/10
கூடுதல்	3/10	6/10	1/10	1

X-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவலும், பரவல் சார்பும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	$f_1(x)$	F (x)
0	1/10	1/10
1	6/10	7/10
2	3/10	1

Y-ன் ஓர நிகழ்தகவுப் பரவலும் பரவல் சார்பும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

y	$f_2(y)$	F (y)
0	3/10	3/10
1	6/10	9/10
2	1/10	1

$$P(Y = 0) = 3/10$$

$$P(X = 0/Y = 0) = \frac{P(X = 0, \ Y = 0)}{P(Y = 0)}$$

$$= \frac{0}{3/10}$$

$$= 0$$

$$P(X = 1, / Y = 0) = \frac{P(X = 1, \ Y = 0)}{P(Y = 0)}$$

$$= \frac{0}{3/10}$$

$$= 0$$

$$P(X = 2, / Y = 0) = \frac{P(X = 2, \ Y = 0)}{P(Y = 0)}$$

$$= \frac{3/10}{3/10}$$

$$= 1$$

எனவே Y = 0 கொடுக்கப்பட்டு X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலும் குவிவுப் பரவல் சார்பும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

x	f (x/y)	F (x/y)
0	0	0
1	0	0
2	1	1

3. கீழ்க்கண்ட X, Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து அவை சார்பற்ற மாறிகளா எனக்கூறு.

X \ Y	0	1	2	கூடுதல்
0	0	·1	·1	·2
1	·2	·2	·2	·6
2	0	·1	·1	·2
கூடுதல்	·2	·4	·4	1

விடை : $P(X = 0, \quad Y = 0) = 0$

$P(X = 0) = \cdot 2$

$P(Y = 0) = \cdot 2$ எனவே $P(X = 0) \times P(Y = 0)$

$\neq P(X = 0, \quad Y = 0)$.

எனவே X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளல்ல.

4. இரு சீரான பகடைகள் வீசப்பட்டன. X_1 முதற்பகடையின் முகப்பு எண்ணையும் X_2 இரண்டாம் பகடையின் முகப்பு எண்ணையும் குறிக்கட்டும். Y என்பது X_1, X_2 ஆகிய இரு எண்களுள் மிகச் சிறிய எண் என்றால் X_1, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க. பரவலிலிருந்து X_1-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளா எனக்காண்க.

விடை : X, எடுக்கும் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6. அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே தலா $\frac{1}{6}$. X_2 எடுக்கும் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6. அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே தலா $\frac{1}{6}$. $[X_1 = 1, Y = 1]$ என்ற நிகழ்ச்சி $[X_1 = 1, X_2 = 1]$, $[X_1 = 1, \; X_2 = 2]$ $[X_1 = 1, \; X_2 = 3, \quad [X_1 = 1, \; X_2 = 4]$, $[X_1 = 1, \; X_2 = 5]$, $[X_1 = 1, \; X_2 = 6]$ என்ற 6 நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்ந்தாலும் நிகழும்.

$$\text{எனவே } P[X_1 = 1, \quad Y = 1] = \sum_{i=1}^{6} P[X_1 = 1 \; X_2 = i]$$

$$= \frac{6}{36}$$

$[X_1 = 1, \ Y = 2]$ என்பது நடக்க முடியாத நிகழ்ச்சியாகும். Y, X_1 X_2 ஆகிய இரண்டில் குறைவான எண்ணுகை வரையப்பட்டிருப்ப தால் $X_1 = 1$ ஆக இருக்கும்போது $Y = 2$ ஆக இருக்கும் நிகழ்ச்சி நடக்காது. எனவே $P[X_1 = 1, \ Y = 2] = 0$ இதே போன்று $[X_1 = 1 \ Y = i]$ $i = 3, 4, 5, 6$ ஆகியவையும் நடக்கவியலாத நிகழ்ச்சிகளாகும். எனவே இவற்றின் நிகழ்தகவுகளும் பூஜ்ஜிய மாகும்.

$[X_1 = 2, \ Y = 1]$ என்பது $[X_1 = 2, \ X_2 = 1]$ என்ற நிகழ்ச்சி யைக்குறிக்கிறது. எனவே $P[X_1 = 2, \ Y = 1] = P[X_1 = 2, \ X_2 = 1]$

$$= P[X_1 = 2] . \ P[X_2 = 1]$$

$$= \frac{1}{36}$$

$[X_1 = 2 \ Y = 2]$ என்பது $[X_1 = 2, \ Y = i]$ $i = 2, 3, 4, 5, 6$ என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று நிகழ்ந்தாலும் நிகழும். எனவே

$$P[X_1 = 2, \ Y = 2] = \sum_{i=2}^{6} P[X_1 = 2 \ Y = i]$$

$$= \frac{5}{36}$$

$[X_1 = 2, \ Y = i]$ $i = 3, 4, 5, 6$ நடக்க முடியாத நிகழ்ச்சிகளாகும். எனவே $P[X_2 = 2, \ Y = i]$ $i = 3, 4, 5, 6$ பூஜ்ஜியமாகும்.

$[X_1 = 3, \ Y = 1]$ என்பது $[X_1 = 3, \ X_2 = 1]$ என்ற நிகழ்ச்சி யைக் குறிக்கும். $\therefore P[X_1 = 3, \ Y = 1] = P[X_1 = 3, \ X_2 = 1]$

$$= \frac{1}{36}$$

$[X_1 = 3, \ Y = 2]$ என்பது $[X_1 = 3, X_2 = 2]$ என்ற நிகழ்ச்சி யைக் குறிக்கும். $\therefore P[X_1 = 3, \ Y = 2] = \frac{1}{36}$

$[X_1 = 3, \ Y = 3]$ என்ற நிகழ்ச்சி $]X_1 = 3, \ X_2 = i]$ $i = 3, 4, 5, 6$ என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று நிகழ்ந்தாலும் நிகழும்

எனவே $P[X_1 = 3, \ Y = 3] = \sum_{i=3}^{6} P[X_1 = 3, \ X_2 = i]$

$$= \frac{4}{36}$$

$[X_1 = 3, Y = i]$ $i = 4, 5, 6$ நடக்க முடியாத நிகழ்ச்சிகளாகும். $[X_1 = 4, Y = 1]$ என்பது $[X_1 = 4, X_2 = 1]$ என்ற நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கிறது. $\therefore P[X_1 = 4, Y = 1] = \frac{1}{36}$ இதேபோன்று $P[X_1 = 4$ $Y = i] = \frac{1}{36}$, $i = 2, 3$, $[X_1 = 4, Y = 4]$ என்பது $[X_1 = 4, X_2 = i]$ $i = 4, 5, 6$ என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று நிகழ்ந்தால் நிகழும். எனவே $P[X_1 = 4, Y = 4] = \frac{3}{36}$.

$[X_1 = 4, Y = i]$, $i = 5, 6$ நடக்க முடியாத நிகழ்ச்சிகளாகும். $[X_1 = 5, Y = i] = \frac{1}{36}$, $i = 1, 2, 3, 4$. $[X_1 = 5, Y = 5]$ என்பது $[X_1 = 5, X_2 = i]$, $i = 5, 6$ என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று நிகழ்ந்தால் நிகழும். எனவே $P[X_1 = 5, Y = 5] = \sum_{i=5}^{6} P[X_1 = 5, X_2 = i]$

$$= \frac{2}{36}$$

$[X_1 = 5, Y = 6]$ நடக்க முடியாத நிகழ்ச்சி. $[X_1 = 6, Y = i] = \frac{1}{36}$ $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. எல்லா அறைகளுக்குரிய நிகழ்தகவுகளும் கணக்கிடப்பட்டு விட்டன. இதைப் பட்டியலாக்கினால் X, Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் கிடைக்கிறது.

X_1 \ Y	1	2	3	4	5	6	கூடுதல்
1	6/36	0	0	0	0	0	6/36
2	1/36	5/36	0	0	0	0	6/36
3	1/36	1/36	4/36	0	0	0	6/36
4	1/36	1/36	1/36	3/36	0	0	6/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36	0	6/36
6	1/36	1/36	1|36	1/36	1/36	1/36	6/36
கூடுதல்	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளென்றால் $P[X_1 = 1, Y = 1] = P[X_1 = 1] \times P[Y = 1]$ என்றிருக்க வேண்டும். இங்கு $P[X_1 = 1$ $Y = 1] = 6/36$. $P[X_1 = 1] \times P[Y = 1] = \frac{11}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{6}{36}$ எனவே X_1-ம் Y-ம் சார்புள்ள மாறிகளாகும்.

தொடர் மாறிகள் X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு (Joint Probability density function of X, Y) : $\left(x-\frac{dx}{2}, x+\frac{dx}{2}\right)$ என்ற மிகச் சிறிய இடைவெளிக்குள் X அமைவதற்கும் $\left(y-\frac{dy}{2}, y+\frac{dy}{2}\right)$ என்ற மிகச் சிறிய இடைவெளிக்குள் அமைவதற்கும் உரிய நிகழ்தகவு f(x, y) dx dy என இருந்தால் f(x, y) என்ற சார்பு X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனப்படுகிறது. X, Y, A என்ற இரு பரிமாண போரல் கணத்தில் (Borel Set) அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ ஆகும்.

X-ன் ஓர அலைவெண் சார்பு (The Marginal frequency function of X) : f(x, y) என்ற அடர்த்திச் சார்பை y-ன் முழு வீச்சு இடைவெளிக்கு தொகைப்படுத்தினுல் (integrate) X-ன் ஓர அலை வெண் சார்பு அல்லது விளிம்பு அலைவெண் சார்பு கிடைக்கும். இதைப் பெரும்பாலும் $f_1(x)$ எனக் குறிப்பார்கள்.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$$

இதே போன்று y-ன் விளிம்பு அலைவெண் சார்பு $f_2(y)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளுக்குப் போன்றே தொடர்மாறிகளுக்கும் நிபந்தனைக்குட்பட்ட அடர்த்திச் சார்பு வரையப்படுகிறது. X = x என்ற மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு Y-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $h(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இது வரையப்படுவதற்கு $f_1(x) > 0$ என்றிருக்க வேண்டும். இதே போன்று Y = y என்ற மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டு இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்ட X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $g(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$ என வரையப்படுகிறது.

X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகள் என்ருல் X எடுக்கும் மதிப்புகள் Y-யின் மதிப்புகளை எந்த விதத்திலும் பாதிக்காது. எனவே

$h(y/x) = f_2(y)$. இதே போன்று $g(x/y) = f_1(x)$. ஆகையால் X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளென்றால் $f(x, y) = f_1(x) . f_2(y)$. என்றிருக்கும். அதாவது இரண்டின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு X, Y-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்கு சமமாயிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

$f(x, y) = c(x + y) \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 1$ என்றால் c-யின் மதிப்பைக் காண்க. i $P[X > \cdot 5]$ ii $P[0 < X < \cdot 5, \; 0 < y < \cdot 5]$ கணக்கிடுக.

விடை: f(x, y) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால்

$$\int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$ ஆகும்.

அதாவது இங்கு $$\int_0^1 \left[\int_0^1 c(x + y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 c\, [x^2/_2 + yx]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 c\, (\tfrac{1}{2} + y)\, dy$$

$$= c \int_0^1 (\tfrac{1}{2} + y)\, dy$$

$$= c\, [\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y^2]_0^1$$

$$= c \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= c$$

f(x, y) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாதலால் c-யின் மதிப்பு ஒன்றாகும்.

(i) $P[X > \cdot 5] = P[X \geq \cdot 5,\ 0 < Y < 1]$

$$= \int_{\cdot 5}^{1} \left\{ \int_{0}^{1} 1\, dy \right\} dx$$

$$= \int_{\cdot 5}^{1} [\, y\,]_{0}^{1} dx$$

$$= [\, x\,]_{\cdot 5}$$

$$= \cdot 5$$

(ii) $P[0 < X < \cdot 5,\ 0 < Y < \cdot 5]$

$$= \int_{0}^{\cdot 5} \left\{ \int_{0}^{\cdot 5} dy \right\} dx$$

$$= \int_{0}^{\cdot 5} \cdot 5\, dx$$

$$= \cdot 5\, [\, x\,]_{0}^{\cdot 5}$$

$$= \cdot 25$$

2. X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = e^{-(x + y)} \quad x > 0 \quad y > 0$$
$$= 0 \text{ மற்றபடி}$$

(i) $P\{0 < X < 1, \quad 0 < Y < 1\}$

(ii) $P\{X > Y\}$ கணக்கிடுக

(iii) X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட அடர்த்திச் சார்பு ($Y = y$ கொடுக்கப்பட்டால்) என்ன ?

விடை : $P\{0 < X < 1,\ 0 < Y < 1\} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x+y)} dx\, dy$

$$= \int_0^1 e^{-x} dx \cdot \int_0^1 e^{-y} dy$$

$$= \left[e^{-x} \right]_0^1 \left[e^{-y} \right]_0^1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

$$P\{X > Y\} = \int_0^\infty dy \int_y^\infty e^{-(x+y)} dx$$

$$= \int_0^\infty dy\ e^{-y} \int_y^\infty e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} dy \left(+ e^{-x} \right)_y^\infty$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} dy \left(+ e^{-y} \right)$$

$$= + \int_0^\infty e^{-2y} dy$$

$$= \left[\frac{e^{-2y}}{2} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}[0 + 1]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$g(X/Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

$$f_2(y) = \int_0^{\infty} f(x_1, y)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dx$$

$$= e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}$$

$$= e^{-y}(0 + 1)$$

$$= e^{-y}$$

$$\therefore g(X/Y = y) = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}$$

$$= e^{-x} \qquad x > 0 \quad y > 0$$

3. X, Y-ன் கூட்டு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \quad 0 < y < x \\ 0 & \text{மற்ற இடங்களில்} \end{cases}$$

என்றால் (i) இரு விளிம்பு அடர்த்தி சார்புகளையும் காண்க. (ii) Y = y கொடுக்கப்பட்டு X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை காண்க.

விடை : $f_1(x) = \int f(x, y)\, dy$

$$= \int_0^x \tfrac{1}{2}\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\, [\, y\,]_0^x$$

$$= \tfrac{1}{2}\, x \qquad 0 < x < 2$$

$$f_2(y) = \int f(x, y)\, dx$$

$$= \int_y^2 \tfrac{1}{2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\, [\, x\,]_y^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (2 - y) \qquad 0 < y < 2$$

$$g\,(X/Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_2\,(y)}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{2}(2 - y)}$$

$$= \frac{1}{2 - y} \qquad \begin{matrix} 0 < y < x \\ 0 < x < 2 \end{matrix}$$

இதுவரை 2 மாறிகளுக்கு உண்மையாயுள்ள நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் திட்டமான n மாறிகளுக்கும் பொருந்தும். $X_1\, X_2\, X_3$ ஆகிய மூன்று ராண்டம் மாறிகளுக்குரிய நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x_1\, x_2\, x_3)$ என்றால் $X_1\, X_2$-வின் விளிம்புப் பரவல் $\sum_{x_3} f(x_1\, x_2\, x_3)$, $X_1\, X_3$-யின் விளிம்புப் பரவல் $\sum_{x_2} f(x_1\, x_2\, x_3)$ ஆகும். இது போல் தொடர்மாறிகளென்றால் Σ-விற்கு பதிலாக $\int$ பயன்படுத்தப்படும். இதே போன்று $X_3 = x_3$ கொடுக்கப்பட்டு $X_1\, X_2$-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் $f(X_1\, X_2 / X_3 = x_3) = \dfrac{f(x_1\, x_2\, x_3)}{f_3\,(x_3)}$

$X_1, X_2 \ldots X_n$ என்பன சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளென்றால் $f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = f_1(x),\ f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ அதாவது n மாறிகளின் கூட்டு அடர்த்திச் சார்பு தனித்தனியான விளிம்புச் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையாகும். மேலும் $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பன சார்பற்ற மாறிகளென்றால் $g_1(X_1), g_2(X_2) \cdots g_n(X_n)$ என்ற அந்த மாறிகளின் சார்புகளும் சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளாகும்.

கணக்கு :

X, Y, Z என்ற தொடர்பற்ற ராண்டம் மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவல் $f(x, y, z) = \frac{1}{216}$

$x = 1, 2, \ldots 6$

$y = 1, 2, \ldots 6$

$z = 1, 2, \ldots 6$

என்றால் X, Y-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

$$X, Y\text{-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல்} = \sum_{z} f(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{36}$$

பயிற்சி

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட X, Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து X-ன் விளிம்புப் பரவலையும் Y-ன் விளிம்புப் பரவலையும் காண்க. X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளா எனக் காண்க.

X \ Y	—2	—1	1	2
—1	1/4	0	0	1/4
1	0	1/4	1/4	0

2. ஒரு சீரான நாணயம் சுண்டப்பட்டது. தலை விழுந்தால் ஒரு பகடை வீசப்பட்டது. பூ விழுந்தால் மீண்டும் நாணயம் சுண்டப்பட்டது. தலைக்கு 1 என்ற எண்ணும் பூவிற்கு 0 என்ற எண்ணும் கொடுக்கப்பட்டது. X என்பது முதலில் கிடைக்கும் எண்ணாகவும் Y என்பது இரண்டாம் முறை கிடைக்கும் எண்ணாகவும் இருந்தால் X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலையும் $h(Y / X = 1)$ என்ற நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவலையும் காண்க.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள X, Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து இரு விளிம்புப் பரவல்களையும் Y = 1, Y = 2, Y = 3 கொடுக்கப்பட்ட மூன்று X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவல்களையும் காண்க.

X \ Y	1	2	3
1	5/27	4/27	2/27
2	1/27	3/27	3/27
3	3/27	4/27	2/27

4. ஒரே நிகழ்தகவு வெளியைச் சார்ந்த இரு ராண்டம் மாறிகள் X, Y-ன் விளிம்பு நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

X	0	1	2	3
$f_1(x)$	·1	·2	·4	·3

Y	0	1	2	3
$f_2(y)$	·3	·1	·4	·2

(i) X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகள் என்ற அனுமானத்தில் X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்க.

(ii) $P(X^2 + Y^2 \leq 10)$ஐக் கணிக்க.

5. X = x கொடுக்கப்பட்டு Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட

அடர்த்திச் சார்பு $g(y/x) = 2y/x^2 \begin{cases} 0 < y < x \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

$= 0 \begin{cases} y < 0 \text{ அல்லது } y > x \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

X-ன் அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = 7x^6$; $0 < x < 1$ கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்க.

(i) X, Y-ன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

(ii) Y-ன் விளிம்பு அடர்த்திச் சார்பு

(iii) $P[X > 2Y]$

6. X, Y என்ற ராண்டம் மாறிகளின் கூட்டு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y) = c\,x\,y \quad 0 < x < 1;\ 0 < x < 1;\ 0 < y < 1$

$= 0$ மற்ற இடங்களில்

என்ருல் (i) k-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $f(x/y)$ ஐக் $(Y = y$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) காண்க.

7. X, Y என்ற ராண்டம் மாறிகளின் அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \frac{\pi^2}{8} \text{Sin} \frac{\pi}{2} (x + y) \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

$= 0$ மற்ற இடங்களில்

X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளா எனக்காண்க.

8. X, Y-ன் அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \tfrac{1}{8}\ (6 - x - y) \qquad 0 < x < 2,\quad 2 < y < 4$$

$= 0$ மற்ற இடங்களில்

கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடுக.

(i) $P(x < 1 \quad y < 3)$

(ii) $P(x < 1 / y < 3)$

(iii) $P(x > 1 / y < 3)$

4. கணக்கியல் எதிர்நோக்கல்

(MATHEMATICAL EXPECTATION)

X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற ராண்டம் மாறியாக இருக்கட்டும். அது $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளை முறையே $f(x_1)$, $f(x_2) \ldots f(x_n)$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுக்கிறது. $\varphi(X)$ என்பது Xன் சார்பாக இருந்தால் $\varphi(X)$ன் எதிர் நோக்கல் $E\varphi(X) = \sum_x \varphi(x) f(x)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது

$$E\varphi(X) = \varphi(x_1)\ f(x_1) + \varphi(x_2)\ f(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)\ f(x_n)$$

X என்பது ஒரு தொடர் தொடர் வாய்ப்பு மாறி (Continuous Random Variable) ஆக இருந்தால் வரையறையில் Σ என்ற கூட்டல் அடையாளம் $\int$ தொகை அடையாளமாக மாற்றப்படும். அதாவது,

$$E\varphi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ f(x)\ dx$$

$\varphi(x) = X$ என்றிருந்தால் எதிர்நோக்கல் X-ன் கூட்டுச் சராசரி எனப் படுகிறது.

$$E X = \sum_x x\ f(x) \quad \text{(தொடர்ச்சியற்ற மாறி)}$$

(அல்லது)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx \quad \text{(தொடர் மாறி)}$$

$\varphi(X) = (X-\overline{X})^2$ என்றிருந்தால் $E(X-\overline{X})^2$ வாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாடு (Variance) எனப்படுகிறது. மாறுபாட்டின் வர்க்க மூலம் X-ன் திட்ட விலக்கம் (Standard deviation) எனப்படுகிறது. ஒரு

வாய்ப்பு மாறிக்கு கூட்டுச் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் மிக முக்கிய மான சுட்டுறுப்புக்களாகும்.

தேற்றம் 1: a என்பது ஒரு நிலையெண் என்ருல் E(a) = a ஆகும். நிலையெண்ணின் எதிர்நோக்கல் அதே நிலையெண்ணுகும்.

நிரூபணம் : $E\varphi(X) = \sum_x \varphi(x)\ f(x)$

$$\therefore\ E(a) = \sum_x a .\ \varphi(x)$$

$$= a \sum_x \varphi(x)$$

$$= a \times 1.$$

தேற்றம் 2 : a என்பது ஒரு நிலையெண்ணுகவும் X என்பது ஒரு வாய்ப்பு மாறியாகவும் இருந்தால் E a X = a EX

நிரூபணம் : $\varphi(X) = a X$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$E\varphi(X) = \sum_x ax\ f(x)$$

$$= a \sum_x x\ f(x)$$

$$= a\ E\ X.$$

தேற்றம் 3 : a என்பது ஒரு மெய்யெண் என்ருல் E(X + a) = Ex + a.

நிரூபணம் : $\varphi(X) = X + a$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$E\varphi(X) = E(x + a)$$

$$= \sum_x (x + a)\ f(x)$$

$$= \sum_x x\ f(x) + a \sum_x f(x)$$

$$= E\ X + a$$

தேற்றம் 4 : X என்பது தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறியென் ருல் $E(X - \overline{X})^2 = EX^2 - (EX)^2$

நிரூபணம் : $E(x^2 - 2x\overline{X} + \overline{X}^2)$

$$= E X^2 - 2\overline{X} EX + E\overline{X}^2$$

$$= E x^2 - 2\overline{X}^2 + \overline{X}^2$$

$$= E X^2 - \overline{X}^2$$

$$= E X^2 - (EX)^2 \quad (\because \overline{X} = EX)$$

தேற்றம் 5 : $(X + a)$யின் மாறுபாடும் X-ன் **மாறுபாடும்** ஒன்றே தான்.

நிரூபணம் : $E(X + a) = EX + a$

ஃ $(X + a)$-ன் மாறுபாடு $E(X + a - EX - a)^2$

$$= E(X - EX)^2$$

= X-ன் மாறுபாடு

இரு அல்லது மேற்பட்ட வாய்ப்பு மாறிகளுக்கான எதிர் நோக்கல் : **X, Y** என்ற தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்தி எண் $f(x, y)$ என்றிருக்கட்டும். $\varphi(X, Y)$ என்பது X, Y-ன் சார்பாக இருக்கட்டும். $\varphi(X, Y)$-ன் எதிர் நோக்கல்.

$E\,\varphi(X, Y) = \sum_{x,y} \varphi(x, y)\, f(x, y)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\varphi(X, Y) = X$ என்ருல் X-ன் கூட்டுச் சராசரியும் $\varphi(X, Y) = Y$ என்ருல் Y-ன் கூட்டுச் சராசரியும் கிடைக்கும்.

$E(X - \overline{X})\ (Y - \overline{Y})$, X, Y-ன் உடன் மாறுபாடு (Co-Variance) எனப்படுகிறது., இது p அல்லது μ_{11} அல்லது $\sigma_{\overline{xy}}$ என்ற எழுத்துக் களால் குறிக்கப்படும். இரு சார்புள்ள மாறிகளுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழு (Correlation Co-efficient) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப் படுகிறது. இது 'r' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

$r = \frac{p}{\sigma_{\overline{x}}\ \sigma_{\overline{y}}}$. p என்பது X, Yக்கு உள்ள உடன் மாறுபாட்டையும் $\sigma_{\overline{x}}$ X-ன் திட்ட விலக்கத்தையும் $\sigma_{\overline{y}}$ Y-ன் திட்ட விலக்கத்தையும் குறிக்கிறது.

தேற்றம் 6 : **X, Y** என்ற இரு வாய்ப்பு மாறிகளுடைய அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y)$ என்ருல்

$$E(X + Y) = EX + EY.$$

X + Y-ன் எதிர்நோக்கல் X-ன் எதிர் நோக்கல் Y-ன் எதிர் நோக்கல் ஆகியவற்றின் கூடுதலாகும்.

நிரூபணம் : பிரிவு 1. X, Y என்பன முறையே $x_1\ x_2 \ldots x_n$, $y_1, y_2 \ldots y_n$ என்ற மதிப்புகள் எடுக்கும் தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளாயிருக்கட்டும். $P[X = x_i\ Y = y_j] = p_{ij}$ என்றிருக்கும். அதாவது $f(x_i, y_j) = p_{ij}$.

$$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y)\ f(x, y)$$

$$= \sum_{x_i} \sum_{y_j} (x_i + y_j)\ p_{ij}$$

$$= \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i\ p_{ij} + \sum_{x_i} \sum_{y_j} y_j\ p_{ij}$$

$$= \sum_{x_i} x_i\ p_i + \sum_{y_j} y_i\ p_j \quad \left(\sum_{y_j} p_{ij} = p_i,\ \sum_{x_i} p_{ij} = p_j \right)$$

$$= Ex + Ey$$

பிரிவு 2 : X, Y தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளாயிருக்கட்டும்

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\ f(x, y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x, y)\ dx\ dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\ f(x, y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy \right] dx +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx \right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy$$

$$= EX + EY.$$

கிளைத் தேற்றம் : $X_1\ X_2 \ldots X_n$, n வாய்ப்பு மாறிகளென்றால் $E(X_1 + X_2 + \ldots X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n$

தேற்றம் 7 : X, Y ஆகிய வாய்ப்பு மாறிகள் சார்பற்றவை யென்றால் $E\,X\,Y = EX.\ EY.$

நிரூபணம் : பிரிவு 1 : X, Y தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறிகளாயிருக்கட்டும். $P[X = x_i,\ Y = y_j] = p_{ij}$ என்றிருக்கட்டும். X, Y சார்பற்ற மாறிகளாதலால்

$$P[X = x_i,\ Y = y_j] = P[X = x_i] . P[Y = y_j]$$

$$= p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$$

அதாவது $p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$

$$E\,X\,Y = \sum_i \sum_j x_i\, y_j\, p_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i\, y_j\, p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$$

$\sum_i x_i\, p_{i\cdot}$ $E\,Y$ (முதலில் j வகையறுவைக் கூட்டியதால் E Y கிடைக்கிறது.)

$E\,X.\ EY.$

பிரிவு 2 : X, Y தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளாயிருக்கட்டும் இவை சார்பற்றிருப்பதால் $f(x, y) = f_1(x) . f_2(y)$

$$\therefore E\,X\,Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f_1(x)\, f_2(y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy$$

$$= EX. \quad EY.$$

கிளைத் தேற்றம் : $X_1 X_2 \ldots X_n$, n சார்பற்ற மாறிகளென்றால் $E(X_1 X_2 \ldots X_n) = EX_1\, EX_2 \ldots EX_n$.

தேற்றம் 8 : X, Y சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகளென்றால் அவற்றின் உடன் தொடர்பாடு பூஜ்ஜியமாகும்.

நிரூபணம் : $p = E(X - \bar{X})\ (Y - \bar{Y})$

$$= E(X - \bar{X}).\ \ E(Y - \bar{Y})$$

(சார்பற்றவையாதலால்)

$$= (\bar{X} - \bar{X})\ \ (\bar{Y} - \bar{Y})$$

$$= 0$$

கிளைத்தேற்றம் : சார்பற்ற இரு மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு பூஜ்யம்.

தேற்றம் 9 : X, Y இரு வாய்ப்பு மாறிகள். $l_1\ l_2$ இரு நிலையெண்கள். $l_1 X + l_2 Y$ என்ற வாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாடு $l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2 + 2\, l_1\, l_2\, p$

$$V_{ar}\ (l_1 X + l_2 Y) = l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2 + 2\, l_1\, l_2\, p$$

σ_1^2 X-ன் மாறுபாடு, σ_2^2 Y-ன் மாறுபாடு, p X, Yன் உடன் மாறுபாடு.

நிரூபணம் : $u = l_1 X + l_2 Y$ என்ற வாய்ப்பு மாறியாயிருக்கட்டும். $E\, u = l_1 \bar{X} + l_2 \bar{Y}$

u-வின் மாறுபாடு $= E(u - Eu)^2$

$$= E\, (l_1 X + l_2 Y - l_1 \bar{X} - l_2 \bar{Y})^2$$

$$= E\, [l_1 X - \bar{X}) + l_2\, (Y - \bar{Y})^2]$$

$$= E\Big[l_1^2\, (X - \bar{X})^2 + l_2^2\, (Y - \bar{Y})^2 + 2\, l_1\, l_2 (X - \bar{X})\, (Y - \bar{Y}) \Big]$$

$$= l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2 + 2\, l_1\, l_2\, p$$

கிளைத்தேற்றம் 1 : X, Y, சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகளென்றால் $(l_1 X + l_2 Y)$-இன் மாறுபாடு $= l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2$

கிளைத்தேற்றம் 2 : $X_1 X_2 \ldots X_n$, n வாய்ப்பு மாறிகள். அவற்றின் மாறுபாடுகள் முறையே $\sigma_1^2, \ldots \sigma_n^2$ ஆகவும், அவற்றிடையே உடன் மாறுபாடுகள் முறையே σ_{ij}, $i \neq j$ எனவும் இருந்தால் $(l_1 X_1 \ldots l_n X_n)$-ன் மாறுபாடு $= l_1^2 \sigma_1^2 + \ldots l_n^2 \sigma_n^2$

$$+ \sum_{i \neq j} l_i l_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

கிளைத்தேற்றம் 3 : கிளைத்தேற்றம் 2-ல் $X_1 \ldots X_n$ சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகளென்றால் $(l_1 X_1 + \ldots l_n X_n)$-ன் மாறுபாடு $= l_1^2 \sigma_1^2 + \ldots + l_n^2 \sigma_n^2$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள்

1. ஒரு பகடையை வீசும் போது முகப்பில் கிடைக்கும் எண்ணை X இருக்கட்டும். X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச்சராசரி திட்டவிலக்கம் காண்க

விடை : x-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலை எழுதி f(x)-க்கு அடுத்த பத்திகளாக x f(x), x^2 f(x) நிறுவப்படுகின்றன.

x	f(x)	x. f(x)	x^2 f(x)
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	6/6	36/6
கூடுதல்	1	21/6	91/6

$$\bar{X} = EX = \Sigma x f(x)$$

$$= \frac{21}{6}$$

$$\text{Var } X = E(X - EX)^2$$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2$$

$$\text{Var } X = \frac{91}{6} - \frac{441}{36}$$

$$= \frac{546 - 441}{36}$$

$$= \frac{105}{6}$$

2. முதல் வெற்றிக்கு முந்திய தோல்விகளின் கணக்கியல் எதிர் பார்த்தல் என்ன? வெற்றிக்குரிய நிகழ்தகவு p எனக்கொள்க. (செ. ப. Sep. 75)

விடை : X என்பது முதல் வெற்றிக்கு முந்திய தோல்விகளின் எண்ணிக்கையாயிருக்கட்டும். முதலில் X-ன் பரவலைக் காண்போம்.

x	f (x)
0	p
1	$(1-p)\, p$
2	$(1-p)^2\, p$
3	$(1-p)^3\, p$
4	$(1-p)^4\, p$

எனவே $E\, x = \Sigma x f(x)$

$$= 1(1-p)\, p + 2\,(1-p)^2\, p + 3\,(1-p)^3\, p + \cdots$$

$$= (1-p)\, p\, [1 + 2\,(1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots]$$

$$= (1-p)\, p\, (1-\overline{1-p})^{-2}$$

$$= \frac{(1-p)}{p}$$

3. X என்ற தொடர்ச்சியற்ற மாறி 0, 1 என்ற மதிப்புகளை முறையே p, (1 − p) என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுக்கிறது. X-ன் கூட்டுச் சராசரி, மாறுபாட்டைக் கணக்கிடு.

விடை : x	f(x)	f(x)	x^2 f(x)
0	p	0	0
1	q=1−p	q	q
கூடுதல்	1	q	q

கூட்டுச் சராசரி $= \overline{X} = q$

$$E X^2 = q$$

$$\text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= q - q^2$$

$$= q\,(1 - q)$$

$$= p\,q$$

4. X, Y, Z என்ற சார்பற்ற மாறிகளுக்கு EX = EY = 2 EZ = − 3 எனவும் Var X = 1, Var Y = Var Z = 2 எனவும் இருக்கிறது. கீழ்க்கண்ட எதிர் நோக்கல் அளவைகளைக் கணக்கிடுக. (i) E (X + Y + Z) (ii) E[X (Y + Z)] (iii) Var (3Y + Z)

விடை : $E(X + Y + Z) = EX + EY + EZ$

$$= 2 + 2 - 3$$

$$= 1$$

(ii) $E[X(Y + Z)] = EXY + EXZ$

$$= EX.\ EY + EX.\ EZ$$

($\because$ சார்பற்றவையாதலால்)

$$= 4 - 6$$

$$= -2$$

(iii) $\text{Var}(3Y + Z) = 9\,\text{Var}\,Y + \text{Var}\,Z$

$= 18 + 2$

$= 20$

தொடர் வாய்ப்பு மாறிக்கான முகடு, இடைநிலை, பெருக்குச் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி :

X என்பது f(x)ஐ நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக உடைய ஒரு தொடர் வாய்ப்பு மாறியாயிருக்கட்டும்.

முகடு : எந்த x-ன் மதிப்பிற்கு f(x) மிக உச்சமாக இருக்கிறதோ அது X-ன் முகடு எனப்படுகிறது. எனவே முகட்டுப் புள்ளியில் $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = 0$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$$

என்றிருக்கும். இந்த இரு நிபந்தனைகளையும் பயன்படுத்தி முகடு கண்டு பிடிக்கப்படுகிறது.

இடை நிலை M : அலைவெண் சார்பு வளைவரை (Graph of frequency function) எந்த புள்ளிக்கு நேரான குத்துயரக் கோடு வளையை இருசம பாதிகளாகப் பிரிக்கிறதோ அந்தப் புள்ளி X-ன் இடைநிலை எனப்படுகிறது.

பெருக்குச் சராசரி (G) : X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் பெருக்குச் சராசரி G கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டை பூர்த்தி செய்யும்

$\log G = \int_{-\infty}^{\infty} \log x .\, f(x)\, dx$ இதிலிருந்து G கணிக்கப்படுமிறது.

ஹார்மோனிக் சரர்சரி (H) : H என்பது வாய்ப்பு மாறியின் ஹார்மோனிக் சராசரியென்றால்

$\frac{1}{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, f(x)\, dx$ என்பது உண்மையாயிருக்கும். இதிலிருந்து H கணிக்கப்படுகிறது.

நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கல், மாறுபாடு (Conditional Expectation and Variance) : X-யின் Y = y கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கு கூட்டுச்சராசரி, மாறுபாடு

கணக்கிட்டால் அது X-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கல், மாறுபாடு எனப்படுகிறது. இது E (X/y), Var (X/y) எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதே போன்று Y-ன் X = x கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரி, மாறுபாடு கணக்கிட்டால் அது Y-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர்நோக்கல், மாறுபாடு எனப்படுகிறது.

அதாவது X, Y தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறிகளென்றால்

$$E\ (X/y) = \sum_x x.\ h\ (x/y)$$

$$Var\ (X/y) = E\ (X^2/y) - [\ E\ (X/y)\ ]^2$$

$$E\ (Y/x) = \sum_y y\ g\ (y/x)$$

$$Var\ (Y/x) = E\ (Y^2/x) - [\ E\ (Y/x)\ ]^2$$

X, Y தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளென்றால்

$$E\ (X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ h\ (x/y)\ dx$$

$$E\ (Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ g\ (y/x)\ dy\ \text{etc}$$

தேற்றம் : $E[\varphi(X)Y = E[\varphi(X)\ E(Y/X)]$

நிரூபணம்: வரையறைப்படி $E(Y/X)$ ஒரு வாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது X, x என்ற மதிப்பை எடுக்கும் போது, $E(Y/X)$ என்ற வாய்ப்பு மாறி $E(Y/x)$ என்ற மதிப்பை $f_1(x)$ என்ற நிகழ்தகவுடன் (இங்கு மாறிகள் தொடர்ச்சியற்றவை என அனுமானித்துக் கொள்கிறோம்.) எடுக்கிறது. எனவே அதற்கு இணையாக $\varphi(X).\ E(Y/X)$ என்ற வாய்ப்பு மாறி $\varphi(x)\ E(Y/x)$ என்ற மதிப்பை $f_1(x)$ என்ற நிகழ்தகவுடன் எடுக்கும்.

எனவே $$E[\varphi(X).\ \ E(Y/X)] = \sum_x \varphi(x)\ \ E(Y/x)\ \ f_1(X)$$

$f_1(x) \neq 0$ என்ற நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்யும் x-ன் மதிப்புகளுக்கு

$$E(Y/x) = \sum_y y\ g\ (y/x)$$

எனவே $$E\varphi(X)\ E(Y/X) = \sum_x \varphi(x)\ f_1(x) \sum_y y\ g\ (y/x)$$

$$= \sum_y y \sum_x \varphi(x)\ f_1(x)\ g(y/x)$$

$$= \sum_y y \sum_x \varphi(x)\ \frac{f_1\ (x).\ \ f(x,\ y)}{f_1\ (x)}$$

$$= \sum_{y} \sum_{x} y \, \varphi(x) \, f(x,y)$$

$$= E[\varphi(x) \, y] \quad \text{(வரையறைப்படி)}$$

R. H. S. = L. H. S.

எனவே தேற்றம் உண்மையாகும்.

கிளைத் தேற்றம் : $E[Y] = E[E(Y/X)]$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = 4x^3, \; 0 \le x \le 1$. X-ன் முகட்டையும் இடைநிலையையும் காண்க.

விடை : $f'(x) = 12x^2$

$f'(x) = 0$ என்றால் x-ன் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

$f''(x) = 24x$

$x = 0$ என்ற புள்ளியில் $f''(x) = 0$. அது < 0 என்றிருந்தால் முகடு பூஜ்ஜியம் எனக் கூறலாம். ஆனால் அவ்வாறில்லாததால் இதற்கு முகடே கிடையாது. மேலும் f(x)ற்குரிய வளையை வரைந்தால் $x = 0$ என்றிருக்கும் போது பூஜ்ஜியமாகவும் $x = 1$ என்றிருக்கும்போது 4 என்றும் கூடிக்கொண்டே போகிறது.

X-ன் இடைநிலை M என்றால்

$$\int_0^M 4\,x^3\,dx = \cdot 5$$

அதாவது $\left[\, x^4 \,\right]_0^M = \cdot 5$

அதாவது $M^4 = \cdot 5$

$$M = (\cdot 5)^{1/4}$$
$$= \cdot 8$$

2. கீழ்கண்ட X, Y-ன் நிகழ்தகவுப்பரவலிலிருந்து E(Y/X=1), Var (Y/X = 1) காண்க,

X \ Y	− 2	− 1	1	2	கூடுதல்
— 1	1/4	0	0	1/4	1/2
1	0	1/4	1/4	0	1/2
கூடுதல்	1/4	1/4	1/4	1/4	1

விடை : முதலில் g (y/x), x கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக் குட்பட்ட Y-ன் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கணக்கிட வேண்டும். அந்தப் பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரியும் மாறுபாடும் கணக்கிட்டால் அதுவே E (Y/X=1), Var (Y/X=1) ஆகும்.

$$P(Y = -2/X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = -2)}{P(X = 1)} = \frac{0}{1/2} = 0$$

$$P(Y = -1/X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(X = 1)} = \frac{1/4}{1/2} = \tfrac{1}{2}$$

$$P(Y = 1 / X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(X = 1)} = \frac{1/4}{1/2} = \tfrac{1}{2}$$

$$P(Y = 2 X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(X = 1)} = \frac{0}{1/2} = 0$$

எனவே g(Y/X = 1) கீழ்க்கண்டவாறிருக்கும்.

y	g(y/X=1)	y g(y/1)	$y^2g(y/1)$
—2	0	0	0
—1	1/2	—1/2	1/2
1	1/2	1/2	1/2
2	0	0	0
கூடுதல்	1	0	1

$$E(Y/X=1) = \sum_{y} y\, g(y/x=1)$$

$$= 0$$

$$E(Y^2/X=1) = \sum_{y} y^2 g\ (y/x=1)$$

$$= 1$$

$$\therefore \text{Var}\ (Y/X=1) = E(Y^2/X=1) - [E(Y/X=1)]^2$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

எனவே $X = 1$ கொடுக்கப்பட்ட Y-யின் கூட்டுச் சராசரி $= 0$, மாறுபாடு 1 ஆகும்.

3. X, Y என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y) = x + y \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$

$= 0$ மற்ற இடங்களில்

$E(Y/x)$ for $0 < x < 1$, Var (Y/x) ஆகிய அளவைகளைக் காண்க.

விடை : முதலில் $g(y/x)$ ஐக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$g(y/x) = \frac{f(x,\ y)}{f_1\ (x)}$$

$$f_1\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\ dy$$

$$= \int_{0}^{1} (x + y)\ dy$$

$$= \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1$$

$$= x + \tfrac{1}{2} \qquad 0 < x < 1$$

$$\therefore g(y/x) = \frac{x + y}{x + \frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ E(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g\,(y/x)\, dy$$

$$= \int_{0}^{1} y\, \frac{(x + y)}{x + \frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \int_{0}^{1} (xy + y^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{x + \cdot 5} \left[\frac{x\,y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x + \cdot 5}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{x + \cdot 5} \quad \frac{3x + 2}{6}$$

$$= \frac{2}{2x + 1}\ \frac{3x + 2}{\not{6}\ \ 3} \qquad\qquad 0 < x < 1$$

$$E(Y^2/x) = \int_{0}^{1} y^2 \ \frac{(x + y)}{x + \frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{2}} \left[\frac{x\,y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{2}}\left[\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{4x + 3}{2x + 1} \cdot \ \frac{1}{6}$$

$$\textbf{Var }(\mathbf{Y/x}) = E(Y^2/x) - [\,E(Y/x)\,]^2$$

$$\textbf{Var }(\mathbf{Y/x}) = \tfrac{1}{6}\ \frac{4x + 3}{2x + 1} - \left[\frac{3x + 2}{3(2x+1)}\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{6}\ \frac{4x + 3}{2x + 1} - \frac{(3x + 2)^2}{9(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{3(2x+1)(4x+3) - 2(9x^2+12x+4)}{18(2x+1)^2}$$

$$= \frac{3(8x^2+10x+3) - 18x^2 - 24x - 8}{18(2x+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2+6x+1}{18(2x+1)^2}$$

வாய்ப்பு மாறிகளின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Moments of Random Variables) : r என்பது ஒரு நேர்மறை (Positive) முழு எண்ணாக இருக்கட்டும். a என்பது ஒரு நிலையெண் (Constant) என்றால் $E(X-a)^r$ என்ற எண் X என்ற மாறியின் 'a'ஐ மையமாகக் கொண்ட r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகையாகும். 'a' பூஜ்ஜியமென்றால் பூஜ்ஜியத்தை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கிடைக்கும். 'a' அல்லது பூஜ்ஜியத்தை மையமாகக் கொண்ட பெருக்குத் தொகைகள் μ'_r எனக் குறிக்கப்படும். 'a' என்பது $EX(=\bar{X})$ என்றால் பெருக்குத் தொகைகள் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் எனப்பட்டு μ_r என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கும் பெருக்குத் தொகைகளுக்கும் உள்ள உறவு :

$$\mu_r = E(X-\bar{X})^r$$

$$= E(X - a - \overline{\bar{X}-a})^r$$

$$= E[X-a)^r - rc_1 (X-a)^{r-1}(\bar{X}-a) +$$

$$rc_2 (X-a)^{r-2}(\bar{X}-a)^2 \dots + (-1)^{r-1} rc_{r-1} (X-a)$$

$$(\bar{X}-a)^{r-1} + (-1)^r rc_r (\bar{X}-a)^r]$$

$\bar{X} - a = d$ என்றிருக்கட்டும்.

$$\mu_r = E(X-a)^r - rc_1 \ (\bar{X}-a) E(X-a)^{r-1} + \dots$$

$$+ (-1)^{r-1} r(\bar{X}-a)^{r-1} E(X-a) + (-1)^r E(\bar{X}-a)^r$$

$$\mu_r = \mu'_r - rc_1 \mu'_{r-1} d + rc_2 \mu'_{r-2} d^2 \dots + (-1)^{r-1} r d^r$$

$$+ (-1)^r d^r \ (\because E(X-a) = \bar{X} - a = d)$$

$$\mu_r = \mu'_r - rc_1 \mu'_{r-1} d + \dots + (-1)^{r-1} d^r (r-1)$$

(கடைசி இரு எண்களும் இணைக்கப்பட்டதால்)
எந்த ஒரு வாய்ப்பு மாறிக்கும் $\mu_1 = 0$

$$\mu_1 = E(X - \overline{X}) = EX - \overline{X}$$
$$= \overline{X} - \overline{X}$$
$$= 0$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - d^2$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 d + 2d^3$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3 d + 6\mu'_2 - 3d^4$$

$$\mu_5 = \mu'_5 - 5\mu'_4 d + 10\mu'_3 d^2 - 10\mu'_2 d^3 + 5d^5$$

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கொடுக்கப்பட்டு சாதாரண விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் காண கீழ்க்கண்ட உறவு பயன்படும்.

$$\mu_r = E(X - \overline{X})^r = E(X - a - \overline{X - a})^r$$
$$= E[(X - a)^r - rc_1 (X - a)^{r-1} (\overline{X} - a)$$
$$+ (-1)^{r-1} rc_{r-1} (X - a) (\overline{X} - a)^{r-1}$$
$$+ (-1)^r rc_r (\overline{X} - a)^r]$$

$\overline{X} - a = d$ என்றிருக்கட்டும்.

$$\mu_r = E(X - a)^r - r\, d\, E(X - a)^{r-1} + rc_2\, d^2\, E(X - a)^{r-2}$$
$$+ \ldots + (-1)^{r-1} r\, d^{r-1} E(X - a) + (-1)^r rc_r\, E\, d^r$$
$$= \mu'_r - r\, \mu'_{r-1} d + rc_2\, \mu'_{r-1} d^2 - \ldots + (-)^{r-1} d^r (r-1)$$

இருமாறிகளுக்கான விலக்கப் பெருக்குத் தொகை : X, Y என்பன இரு வாய்ப்பு மாறிகளாகவும் அவற்றின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x, y) என்றுமிருக்கட்டும். (r, s) ஆவது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_{rs} கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\mu_{rs} = E(X - EX)^r\ (Y - EY)^s$$
$$= E(X - \overline{X})^r\ (Y - \overline{Y})^s$$

இதில் $\overline{X}, \overline{Y}$ க்கு பதிலாக மாறிலிகளோ அல்லது பூஜ்ஜியமோ இருந்தால் அது சாதாரண விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ'_{rs}

$$\mu'_{rs} = E\,X^r\,Y^s$$

அல்லது

$$\mu'_{rs} = E(X - a)^r \quad (Y - b)^s$$

எல்லா வரையறைகளிலும் r-ம், s-ம் முழு நேர்மறை எண்கள். $\mu_{11} = E(X - \overline{X}) \quad (Y - \overline{Y})$ X, Y-ன் உடன்மாறுபாடு (Covariance) எனப்படுகிறது. μ_{20}, μ_{02} முறையே X-ன் மாறுபாடும் Y-ன் மாறுபாடும் ஆகும். X-ம், Y-ம் இரு சார்புள்ள மாறிகளென்றால் அவற்றிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக்கெழு r

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x\,\sigma_y}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\mu_{11} = E(X - EX) \quad (Y - EY)$$
$$= E\,XY - EX.\;EY$$
$$\sigma_x^2 = \mu_{20} = E(X - EX)^2$$
$$= E\,X^2 - (EX)^2$$
$$\sigma_y^2 = \mu_{02} = E(Y - EY)^2$$
$$= EY^2 - (EY)^2$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் :

1. X என்ற தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறி 0, 1 என்ற மதிப்புகளை முறையே q, (1 – q) = p என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுக்கிறது. இந்த மாறியுடைய முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

விடை : முதலில் பூஜ்யத்தை மையமாகக் கொண்ட பெருக்குத் தொகைகளை கண்டு பிடித்து அவற்றை பயன்படுத்தி மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டு பிடிப்பது சுலபம். அதற்கான பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	f(x)	xf(x)	$x^2f(x)$	$x^3f(x)$	$x^4f(x)$
0	q	0	0	0	0
1	p	p	p	p	p
கூடுதல்	1	p	p	p	p

$$\mu'_1 = \sum_x x\, f(x)$$

$$= p$$

$$\mu'_2 = \Sigma\, x^2 f(x)$$

$$= p$$

$$\mu'_3 = \Sigma\, x^3 f(x)$$

$$= p$$

$$\mu'_4 = \Sigma\, x^4 f(x)$$

$$= p$$

$$\therefore\ \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - d^2$$

$$d = \overline{X} - a$$

$$= p - 0$$

$$= p$$

$$\therefore\ \mu_2 = \mu'_2 - p^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p\,(1-p)$$

$$= p\,q$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\, d + 2d^3$$

$$= p - 3p^2 + 2p^3$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3 d + 6\mu'_2\, d^2 - 3d^4$$

$$= p - 4p^2 + 6p^3 - 3p^4$$

$$= p(1 - 4p + 6p^2 - 3p^3)$$

2. **X** என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் **அடர்த்திச் சார்பு** **f(x)** $= 2x \qquad 0 < x < 1.$

X-ன் முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கண்டு பிடி.

விடை : $\overline{X} = EX = 2\int_0^1 x^2\, dx$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\mu'_2 = E(X - 0)^2$$

$$= 2 \int_0^1 x^3\,dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$\mu'_3 = EX^3$$

$$= 2 \int_0^1 x^4\,dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$\mu'^4 = EX^4$$

$$= 2 \int_0^1 x^5\,dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$d = \overline{X} - a$$

$$= \frac{2}{3} - 0$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - d^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{18}$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 d + 2d^3$$

$$= \frac{2}{5} - 3.\ \frac{2}{4}\ .\ \frac{2}{3} + 2.\ \frac{8}{27}$$

$$= \frac{216 - 540 + 16 \times 20}{540}$$

$$\mu_3 = \frac{216 + 320 - 540}{540}$$

$$= \frac{-4}{540}$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\, d + 6\mu'_2\, d_2 - 3d^4$$

$$= \frac{2}{6} - 4.\frac{2}{5}.\ \frac{2}{3} + 6\frac{2}{4}.\ \frac{4}{9} - 3.\ \frac{16}{81}\ 27$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{16}{15} + \frac{12}{9} - \frac{16}{27}$$

$$= \frac{45 - 144 + 180 - 80}{135}$$

$$= \frac{1}{135}$$

3. கீழ்க்கண்ட இரு வாய்ப்பு மாறி நிகழ்தகவுப் பரவலிலிருந்து இரு மாறிகளுக்குள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

Y / X	1	2	3	4	5	6	கூடுதல்
1	6/36	0	0	0	0	0	6/36
2	1/36	5/36	0	0	0	0	6/36
3	1/36	1/36	4/36	0	0	0	6/36
4	1/36	1/36	1/36	3/36	0	0	6/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36	0	6/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36
கூடுதல்	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

விடை : $r = \dfrac{p}{\sigma_x \sigma_y}$

முதலில் σ_x, σ_y ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவோம்.

$$\sigma_x^2 = EX^2 - (EX)^2$$

X-ன் விளிம்புப் பரவல் :

x	$f_1(x)$	$xf_1(x)$	$x^2 f_1(x)$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	1	6
கூடுதல்	1	7/2	$15\frac{1}{6}$

$$EX = \Sigma\, x\, f_1(x)$$

$$= 7/2$$

$$EX^2 = \Sigma\, f_1(x) \,.\, x^2$$

$$= 15\tfrac{1}{6}$$

$$\text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= 15\tfrac{1}{6} - \tfrac{49}{4}$$

$$= \frac{182 - 147}{12}$$

$$= \frac{35}{12}$$

Y-ன் விளிம்புப் பரவலிலிருந்து EY, EY^2 கணக்கிடுகிறோம்.

y	$f_2(y)$	$yf_2(y)$	$y^2 f_2(y)$
1	11/36	11/36	11/36
2	9/36	18/36	36/36
3	7/36	21/36	63/36
4	5/36	20/36	80/36
5	3/36	15/36	75/36
6	1/36	6/36	6/36
கூடுதல்	1	$\frac{91}{36}$	$\frac{271}{36}$

$$EY = \Sigma\, y.\ f_2(y)$$

$$= \frac{91}{36}$$

$$EY^2 = \Sigma\, y^2 f_2(y)$$

$$= \frac{271}{36}$$

$$\text{Var } Y = EX^2 - (EY)^2$$

$$= \frac{271}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2$$

$$= \frac{271}{36} - \frac{8281}{1296}$$

$$= \frac{9756 - 8281}{1296}$$

$$= \frac{1475}{1296}$$

Cov (X, Y) = p = EXY − EX. EY

EXYஐ தனியாக கணக்கிட வேண்டும்.

$$EXY = \Sigma\, xy\, f(x, y)$$

$$= 1.\frac{6}{36} + 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{1}{36} + 4.\frac{1}{36} + 5.\frac{1}{36} + 6.\frac{1}{36}$$

$$+4.\frac{5}{36} + 6.\frac{1}{36} + 8.\frac{1}{36} + 10.\frac{1}{36} + 12.\frac{1}{36}$$

$$+9.\frac{4}{36} + 12.\frac{1}{36} + 15.\frac{1}{36} + 18.\frac{1}{36}$$

$$+16.\frac{3}{36} + 20.\frac{1}{36} + 24.\frac{1}{36}$$

$$+25.\frac{2}{36} + 30.\frac{1}{36}$$

$$+36.\frac{1}{36}$$

$$= \frac{371}{36}$$

$$\therefore p = EXY - EX.\ EY$$

$$= \frac{371}{36} - \frac{7}{2}.\frac{91}{36}$$

$$= \frac{742 - 637}{72}$$

$$= \frac{105}{72} = 1.49$$

$$\therefore r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{35}{12} = 2.93$$

$$\sigma_x = \sqrt{2.93}$$

$$= 1 \cdot 7$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1475}{1296}$$

$$= 1{\cdot}13$$

$$\sigma_y = \sqrt{1{\cdot}13}$$

$$= 1{\cdot}06$$

$$\therefore\ r = \frac{1{\cdot}49}{1{\cdot}7 \times 1{\cdot}06}$$

$$= {\cdot}82$$

X, Yக்கு இடையே உள்ள உறவு நேர்மறையாகும். ஒட்டுறவுக் கெழு = ·82

4. X, Y என்ற இரு வாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y) = 2 \qquad 0 < x < y < 1$

$= 0$ மற்ற இடங்களில்

என்றால் X, Y இவற்றுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க.

விடை : $r = \dfrac{p}{\sigma_x \sigma_y}$

$$EX = \int_0^1 \int_0^y 2\,x\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^y dy$$

$$= 2\int_0^1 \frac{y^2}{2}\,dy$$

$$= \left[\,y^3/3\,\right]_0^1$$

$$= 1/3$$

$$EY = \int_0^1 \int_0^y 2\,y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 2y \, [x]_0^y \, dy$$

$$\int_0^1 2\,y^2 \, dy$$

$$= \left[2 \, \frac{y^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{\quad}{3}$$

$$EX^2 = \int_0^1 \int_0^y 2x^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^y dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 \, dy$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$EY^2 = \int_0^1 \int_0^y 2y^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 2y^2 \, [x]_0^y \, dy$$

$$= \int_0^1 2y^3 \, dy$$

$$= \left[\frac{2y^4}{4} \right]_0^1$$

$$EY^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$EXY = \int_0^1 \int_0^y 2xy \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 2y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y^3 \, dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\text{Var } Y = EY^2 - (EY)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{6} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{18 - 1}{36}$$

$$= \frac{17}{36}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{17}{36}}$$

$$= \cdot 7$$

$$\text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$
$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$$
$$= \frac{3-2}{18}$$
$$= \frac{1}{18}$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{18}}$$
$$= \cdot 23$$
$$\text{Cov }(X, Y) = EXY - EX.\ EY$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}.\ \frac{2}{3}$$
$$= \frac{9-8}{36}$$
$$= \frac{1}{36}$$
$$\therefore r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y}$$
$$= \frac{1/36}{\cdot 23 \times \cdot 7} = \cdot 17$$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு (Moment Generating function) : X என்பது ஒரு வாய்ப்பு மாறியாக இருக்கட்டும். $E\,e^{t(x-a)}$ என்ற எதிர் நோக்கல் 'a'ஐ மையமாகக் கொண்ட விலக்கத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு எனப்படும். பூஜ்ஜியத்தை மையமாகக் கொண்ட விலக்கத் தொகை சார்பு $E\,e^{tx}$ ஆகும்.

$$E\,e^{t(x-a)} = E[1 + t(X-a) + \frac{t^2}{2!}(X-a)^2 + \ldots\ldots$$
$$\frac{t^r}{r!}(X-a)^r + \ldots\ldots]$$
$$= 1 + \frac{t}{1!}\mu'_1 + \frac{t^2}{2!}\mu'_2 + \ldots \frac{t^r}{r!}\mu'_r + \ldots$$

இவ்வாறு இந்தச் சார்பு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை உற்பத்தி செய்வதால் இது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பு எனப்படுகிறது. பூஜ்ஜியத்தை மையமாகக் கொண்ட உற்பத்தி சார்பு பூஜ்ஜியத்தை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் $\overline{X}$ ஐ மையமாகக் கொண்ட உற்பத்திச் சார்பு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளையும் உற்பத்தி செய்கிறது. $\frac{t^r}{r!}$-ன் குணகம் μ_r அல்லது μ'_r ஐக் கொடுக்கிறது. இது M(t) என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. ஒரு மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை உற்பத்திச் சார்பு தெரிந்தால் அதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை, அந்தச் சார்பை விரித்துக் கண்டு பிடிக்கலாம். 't' ஒரு துணை அலகு. இதன் மதிப்பு நேர் அனந்தத்திலிருந்து எதிர் அனந்தம் வரை எதுவாக வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். 't'-யின் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்தை உள்ளடக்கிய ஒரு இடைவெளியாக இருக்க வேண்டும்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணும் மற்றொரு முறை :

$$M(t) = 1 + \mu'_1 \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}\mu'_2 + \dots \frac{t^r}{r!}\mu'_r + \dots$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0 + \mu'_1 + \frac{2t}{2}\mu'_2 + \dots \frac{rt^{r-1}}{r!}\mu'_r + \dots$$

$$\left.\frac{dM(t)}{dt}\right]_{t=0} = \mu'_1$$

இதே போன்று $\left.\frac{d^2M}{dt^2}\right]_{t=0} = \mu'_2$

$$\left.\frac{d^rM(t)}{dt^r}\right]_{t=0} = \mu'_r$$

இந்த முறையிலும் சுலபமாக விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணலாம்.

தேற்றம் : இரு சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகள் X, Y-ன் கூட்டுத் தொகைக்கான விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உற்பத்தி சார்பு X, Y-ன் தனித்தனிச் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்கு சமம். அதாவது,

$$M_{x+y}(t) = M_x(t) \cdot M_y(t).$$

நிரூபணம் : $M_{x+y}(t) = E\, e^{t(x+y)}$ (மைய பூஜ்ஜியம்)

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{ty} f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy$$

(சார்பற்ற மாறிகளாதலால்)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_1(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_2(y)\, dy$$

$$= M_x(t) \cdot M_y(t)$$

குறிப்பு : இதனை 'n' திட்டமான வாய்ப்பு மாறிகளுக்கு விரித்துக் கொள்ளலாம். $M_{x_1+\dots x_n}(t) = M_{x_1}(t) \times \dots M_{x_n}(t)$.

தேற்றம் : X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பு (M. G. F. என சுருக்கமாக கூறலாம்) M(t) என்றால் CX என்ற வாய்ப்பு மாறியின் M.G.F. M(ct) ஆகும்.

நிரூபணம் : $M(t) = E\, e^{tx}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) CX-ன் M.G.F. $= E\, e^{tcx}$

= M(ct) [X மட்டும் மாறியாகும். எனவே கொடுக்கப் பட்ட M. G. F.-ல் t-க்கு பதிலாக இங்கு ct உள்ளது. எனவே $E\, e^{tcx} = M(ct)$ ஆகிறது.

குவிவு உற்பத்தி சார்பு (Cumulant Generating function) : $M_0(t)$ என்ற பூஜ்ஜியத்தை மையமாகக்கொண்ட விலக்கப்பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பின் மடக்கை குவிவு உற்பத்திச் சார்பு எனப்படுகிறது. இந்தச் சார்பை $1 + \frac{t}{1!}k_1 + \frac{t^2}{2!}k_2 + \frac{t^3}{3!}k_3 + \dots + k_r\frac{t^r}{r!} + \dots$ என விரித்தால் $\frac{t^r}{r!}$ இன் குணகம் 'r' ஆவது குவிவு (r^{th} cumulant) எனப்படுகிறது.

குவிவுகளுக்கும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்குமிடையே

உள்ள உறவு :

$$\log M_0(t) = 1 + k_1 \frac{t}{1!} + k_2 \frac{t^2}{2!} + \dots k_r \frac{t^r}{r!} + \dots \text{ (A)}$$

$$\log M_0(t) = \log \left[1 + \mu'_1 \frac{t}{1!} + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \dots \mu'_r \frac{t^r}{r!} + \dots\right] \text{ (B)}$$

(A), (B)-யிலிருந்து $1 + k_1 \frac{t}{1!} + \dots k_r \frac{t^r}{r!} + \dots = \log \Big[1 +$

$$\mu'_1 \frac{t}{1!} + \dots \mu'_r \frac{t^r}{r!} + \dots\Big]$$

$$= \left(\mu'_1 \frac{t}{1!} + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots\right) -$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\mu'_1 \frac{t}{1!} + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \dots\right)^2$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\mu'_1 \frac{t}{1!} + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots\right) - \dots$$

இரு பக்கங்களிலும் உள்ள $\frac{t}{1!}$-ன் குணகங்களை சமப்படுத்தினுல்

$$K_1 = \mu'_1$$

$\frac{t^2}{2!}$-ன் குணகங்களை சமப்படுத்தினுல்

$$K_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$
$$= \mu_2$$

$\frac{t^3}{3!}$ இன் குணங்களை சமப்படுத்தினுல்

$$K_3 = \mu'_3 - 3\mu_2'(\mu_1') + 2(\mu'_1)^3$$
$$= \mu_3$$

$\frac{t^4}{4!}$ இன் குணகங்களை ஒப்பிட்டு சமப்படுத்தினுல்

$$K_4 = \mu_4' - 4\mu'_3\mu'_1 - 3(\mu'_2)^2 + 12\,\mu'_2(\mu'_1)^2 - 6(\mu'_1)^4$$
$$= \mu_4 - 5\mu_2^2$$

இதிலிருந்து முதற் குவிவைத் தவிர மீதி அனைத்தும் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் சார்பாக உள்ளது புலனுகிறது.

எனவே $M_0(t)$க்கு பதிலாக எந்த மெய்யெண் 'a'ஐ மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பின் மடக்கையாக குவிவு உற்பத்திச் சார்பை விரித்தாலும் முதற்குவிவைத் தவிர மீதி அனைத்து குவிவுகளும் மாறுதிருக்கும். $M(t)$ஐ விரித்துக் கிடைக்கும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் 'a' ஐப் பொருத்து மாறுபடும். குவிவுச் சார்பு $K(t)$ என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

ஆதியை (Origin) யும் அலகையும் மாற்றுவதால் பெருக்குத் தொகைச் சார்பில் ஏற்படும் விளைவுகள் (The effect of change of origin and scale on the M. G. F.).

$M_x(t)$ என்பது x இன் M. G. F. ஆக இருக்கட்டும்.

$Y = \frac{X-a}{h}$ புது மாறியாக இருக்கட்டும். இங்கு 'a'யும் 'h'ம் மாறிலிகள்.

$$M_y(t) = Ee^{ty} = Ee^{\frac{t(x-a)}{h}}$$

$$= Ee^{\frac{tx}{h}} e^{\frac{-at}{h}}$$

$$= e^{\frac{-at}{h}} Ee^{\frac{tx}{h}} \qquad \left(e^{\frac{at}{h}} \text{ மாறிலியாதலால்} \right)$$

$$= e^{\frac{-at}{h}} M_x(t/h)$$

எனவே y யின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் X இன் தொகைகளிலிருந்து மாறுபட்டவை என்பது புலனாகிறது.

ஆதியை மாற்றுவதால் குவிவுச் சார்பில் ஏற்படும் விளைவு : $K_x(t)$ என்பது X இன் குவிவுச் சார்பாக இருக்கட்டும்.

$M_x(t)$ என்பது X இன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை சார்பாக இருக்கட்டும்.

$$K_x(t) = \log M_x(t)$$

$y = x - a$ என்றிருக்கட்டும். 'a' ஒரு மாறிலி.

$M_y(t)$ y இன் M. G. F. ஆகும்.

$$M_y(t) = Ee^{ty}$$

$$= Ee^{t(x-a)}$$

$$= E\, e^{t(x - a)}$$

$$= e^{-ta}\, E e^{tx}$$

$$= e^{-ta}\, M_x(t)$$

$$K_y(t) = \log M_y(t)$$

$$= \log e^{-ta} M_x(t)$$

$$= -ta + \log M_x(t)$$

$$= -ta + 1 + K_1 t + K_2 \frac{t_2}{21} + \ldots$$

எனவே ஆதியை மாற்றுவதால் முதல் குவிவு மட்டுமே மாறும். மீதி குவிவுகள் மாருது எனத் தெரிகிறது.

அலகை மாற்றிஞல் ஏற்படும் விளைவு : X–ன் M.G.F. $M_x(t)$, குவிவுச் சார்பு $K_x(t)$ என்றிருக்கட்டும்.

$Y = \frac{X}{h}$ என்ற புதிய அலகு வேறுபட்ட மாறியாயிருக்கட்டும். h இங்கு மாறிலி.

$$M_y(t) = E\, e^{ty}$$

$$= E\, e^{\frac{tx}{h}}$$

$$= M_x\left(\frac{t}{h}\right)$$

$$\left[1 + \mu'_1 \frac{t}{h} + \frac{\mu'_2}{2!} \frac{t^2}{h^2} + \ldots \frac{\mu'_r}{r!} \frac{t^r}{h_r} + \ldots \right]$$

எனவே Y–யின் r-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை X-ன் r-ஆவது விலக்கப் விலக்கத் தொகையை h^r-ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கிறது,

$$K_y(t) = \log M_y(t)$$

$$= \log M_x(t/h)$$

$$= \log \left[1 + \mu'_1 \frac{t}{h} + \ldots + \frac{\mu'_r}{r!} \frac{t^r}{h_r} + \ldots \right]$$

$\mu'_1 \ldots \mu'_r$, X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள். இதிலிருந்து அலகு மாறுபடும்போது குவிவுகளும் சற்று மாறுபடுவது தெரிகிறது.

சிறப்பியல்புச் சார்பு (Characteristic function) :

X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\varphi(t) = E\,e^{itx}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $i = \sqrt{-1}$ என்ற கற்பனை எண்ணாகும். வரையறையிலிருந்து பெருக்குத் தொகை சார்பும் சிறப்பியல்புச் சார்பும் ஒன்றுபோல் இருப்பதைக் காணலாம். 'a' என்ற எண்ணை மையமாகக் கொண்ட சிறப்பியல்புச் சார்பு $Ee^{it(x-a)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$E\,e^{itx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx \text{ என்ற தொகை}$$

$$|\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} f(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|\,|f(x)|\,dx$$

$$= 1\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= 1$$

எனவே $|\varphi(t)| \leq 1$ என்றிருப்பதால் X-ன் சிறப்பியல்புச் சார்பு எப்போதும் ஒருங்குவதாய் இருக்கும். இது இதற்குரிய தனிச் சிறப்பாகும். பெருக்குத் தொகைச் சார்பிற்கு இது உண்மையல்ல

சிறப்பியல்புச் சார்பின் பண்புகள் :

(i) $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(ii) $|\varphi(t)| \leq 1$

(iii) $\varphi(t)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

(iv) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

$$\overline{\varphi(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,dF(x)$$

$= \varphi(-t)$

எனவே $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$

(v) $\varphi(t)$ஐ t-யின் ஏறு வரிசையில் விரித்து எழுதினல் $\frac{(it)^r}{r!}$ இன் குணகம் μ'_r ஆகும்.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{itx}{1!} + \dots \frac{(itx)^r}{r!} \dots\right) dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) + \frac{it}{1!}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) + \dots \frac{(it)^r}{r!}\int_{-\infty}^{\infty} x^r dF(x) + \dots$$

$$= 1 + \frac{it}{1!}\mu'_1 \dots + \frac{(it)^r}{r!}\mu'_r + \dots$$

பயிற்சி

1. X என்பது மூன்று பகடைகளை வீசும்போது கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகையைக் குறித்தால் EXஐக் கணிக்கவும்.

2. ஒரு கூடையிலுள்ள 3 வெள்ளை 4 சிகப்புப் பந்துகளிலிருந் சம வாய்ப்பு முறையில் 3 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டன. X என்பது அவற்றிலுள்ள வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால் X-ன் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

3. A, B என்ற இரு நபர்கள் ஒரு பந்தய விளையாட்டு விளை யாடுகிருர்கள். முதலில் ஒரு பகடையை வீசி நான்கு என்ற எண்ணைப் பெறுவர்கள், மற்றவரிடமிருந்து ரூ. 10 பெற்றுக் கொள்ள லாம். A என்பவர் முதலில் ஆரம்பித்தால் இருவருக்கும் உரிய எதிர் நோக்கல் அளவைகளைக் கணக்கிடுக.

4. நான்கு பகடைகள் வீசப்பட்டன. X_1 என்ற வாய்ப்பு மாறி முதற்பகடையில் கிடைககும் எண்ணையும் X_2 இரண்டாம் பகடை

எண்ணையும் X_3 மூன்ரும் பகடை எண்ணையும் X_4 நான்காம் பகடை எண்ணையும் குறிக்கிறது. $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ஐக் கணக்கிடுக.

5. A என்பவர் ஒரு பிழற்ச்சியற்ற நாணயத்தை நான்குமுறை சுண்டுகிருர். முதல்முறை தலை கிடைத்தால் அவருக்கு ஒரு ரூபாயும் இரண்டாம் முறை தலை கிடைத்தால் அவருக்கு இரண்டு ரூபாயும் மூன்ரும் முறை தலை கிடைத்தால் மூன்று ரூபாயும் நான்காம் முறை கிடைக்கும் தலைக்கு நான்கு ரூபாய்களும் கிடைக்கும். இதற்குப் பதிலாக பூ கிடைத்தால் எத்தனையாவது முறையோ அத்தனை ரூபாயை அவர் தர வேண்டும். இந்த நிபந்தனைகளுடன் X என்பது அவருக்குக்கு கிடைக்கும் லாபம் என்ருல் EXஐக் கணக்கிடுக.

6. ஒரு பையில், 1, 2 ... 6 எண்களுடைய 6 டிக்கெட்டுகள் உள்ளன. ஒருவர் சம வாய்ப்பு முறையில் இரு டிக்கெட்டுகளை எடுக்கிருர். அந்த டிக்கெட்டுகளில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை ஒற்றைப் படையாயிருந்தால் அதே தொகையைப் பணமாகப் பெறுகிருர். இரட்டைப் படையாக இருந்தால் அதே அளவு தொகையை அவர் தரவேண்டும் என்ருல் அவர் எதிர்பார்க்கும் வருமானம் எவ்வளவு ? (ப. ப.)

7. ஒரு பிழற்ச்சியற்ற நாணயம் முதல் பூ கிடைக்கும் வரை சுண்டப்படுகிறது. X என்பது தேவையான சுண்டுதல்கள் என்ருல் EXஐக் கணிக்கவும்.

8. ஒரு லாட்டரியில் 'n' சீட்டுகளிலிருந்து m சீட்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. n சீட்டுகளில் உள்ள எண்கள் முறையே 1, 2, 3...n ஆகும். X என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகளில் உள்ள வர்க்கத்தின் கூட்டுத்தொகையென்ருல் EXஐக் காண்க. (க. ப.)

9. X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 10, திட்ட விலக்கம் 3, Y என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 12, திட்ட விலக்கம் 2, Z என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச்சராசரி 14, திட்ட விலக்கம் 2·5 என்ருல் $U = X + 2Y - Z$ என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் இவற்றைக் காண்க. X, Y, Z ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்ற மாறிகள்.

10. மூன்று பகடைகளை வீசும்போது கிடைக்கும் எண்கள் முறையே X, Y, Z என்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படுகின்றன. $U = X + Y + Z$ என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

11. X. Y, Z என்ற மூன்று வாய்ப்பு மாறிகள் சம்பந்தப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $EX = 3$ $EY = 2$ $EZ = 2$, $\sigma_x^2 = 10$, $\sigma_y^2 = 20$ $\sigma_z^2 = 10$ $\sigma_{xy} = 10$ $\sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{xz} = 5$. மேற்குறித்த விவரங்களிலிருந்து $X + 2Y - 3Z$ என்ற வாய்ப்பு மாறியின் திட்ட விலக்கத்தை கணக்கிடுக.

10. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள X, Y நிகழ்தகவு அடர்த்திப் பரவலிலிருந்து X-ன் திட்ட விலக்கம், Y-ன் திட்ட விலக்கம், X, Y-ன் உடன் மாறுபாடு, ஒட்டுறவுக்கெழு ஆகியவற்றைக் கணிக்கவும்.

Y/X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/18	—	—	1/36	1/12
2	1/36	—	1/18	—	—	1/18
3	1/36	1/18	—	—	1/18	—
4	1/36	—	1/18	1/6	1/18	1/36
5	1/36	1/18	—	—	—	—
6	1/36	—	1/18	—	1/36	—

(புஜுப '66)

11. X, Y என்ற இரு சார்பற்ற மாறிகள் எடுக்கும் மதிப்புகள் 2, 4, 6 ஆகும். அம்மதிப்புகள் எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$P(X=2) = \cdot 25$ $P(X=4) = \cdot 35$ $P(X=6) = \cdot 40$
$P(Y=2) = \cdot 15$ $P(Y=4) = \cdot 25$ $P(Y=6) = \cdot 60$

$Y = 2$ கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்ட Xஇன் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க. (பெ. ப '68)

12. இரு சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகளுக்குரிய நிகழ்தகவு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$P(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{9}$ $P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{9}$
$P(X = 3, Y = 2) = \frac{1}{9}$ $P(X = 3, Y = 3) = \frac{5}{9}$

இரு மாறிகளும் சார்பற்றனவா எனக் காண்க. இரு மாறிகளுக்கும் உரிய தனித்தனி விளிம்புப் பரவலைக் காண்க.

13. $f(x, y) = 12x^2y \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$
$\qquad = 0$ பிற இடங்களில்

என்பது X, Y என்ற இரு வாய்ப்பு மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும். EX, EX^2, EY, EY^2 $E(Y/x)$, $E(X/y)$ ஆகிய அளவைகளைக் காண்க.

14. இரு வாய்ப்பு மாறிகள் X, Y இன் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x, y) = \frac{1}{8} \qquad 0 < x > 2, \quad 0 < y < x$
$\qquad = 0$ மற்ற இடங்களில்

என்ருல் X Y சார்பற்ற மாறிகளா எனக் காண்க. சார்புள்ளவையென்ருல் அவற்றிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெடுவைக் காண்க.

15. $f(x, y) = x + y \qquad 0 > x < 1, \quad 0 < y < 1$
$\qquad = 0$ பிற இடங்களில்
என்ருல் X, Y சார்பற்ற மாறிகளா எனக் காண்க.

16. X, Y என்ற இரு வாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y) = 4x(1-y) \quad 0 < x, y < 1$
$\qquad = 0$ பிற இடங்களில்
$E(X/y)$, $E(Y/x)$ ஆகிய எதிர் நோக்கல் அளவைகளைக் காண்க.

புதிய பாடத்திட்ட முறைப்படி கேட்கப்படும் கேள்விகள் :

17. X என்ற வாய்ப்பு மாறி 1, -1 என்ற மதிப்புகளை எடுக்கும் நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ என்ருல் Xஇன் எதிர் நோக்கல் அளவை

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

18. X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் பெருக்குத் தொகைச் சார்பு — என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(a) Ee^{x} (b) Ee^{tx} (c) $Ed^{\frac{x}{t}}$ (d) $Ee^{\frac{c}{t}x}$

19. x, y என்பன இரு சார்பற்ற மாறிகளாகவும் அதன் பெருக்குத் தொகைச் சார்புகள் முறையே $M_x(t)$, $M_y(t)$

(a) $M_{x+y}(t) = f(x, y)\ M_x(t)\ M_y(t)$

(b) $M_{x+y} = M_x(t)\ M_y(t)$

(c) $M_{x+y} \neq M_x(t)\ M_y(t)$

20. X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் குவிவுச் சார்பு $K(t) =$

(a) $e^{M(t)}$

(b) $M(t) \times f(x)$

(c) $\log f(x)$

(d) $\log M(t)$

5. சில தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறிகள்

(SOME DISCRETE DISTRIBUTIONS)

பரவல் பெர்னௌல்லியின் (Bernoulli's distributions) :

X என்ற வாய்ப்பு மாறி 0, 1 ஆகிய மதிப்புகளை முறையே 1–p, p என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் எடுத்தால் அதன் பரவல் பெர்னௌல்லியின் பரவல் எனப்படுகிறது.

பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் :

$$\begin{aligned} EX &= \Sigma\, x\, p(x) \\ &= 0\,(1-p) + 1 \cdot p \\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \Sigma\, x^2\, p(x) \\ &= 0\,(1-p) + 1 \cdot p \\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\ X &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \\ &= p\,q \quad (1-p = q) \end{aligned}$$

பரவலின் பெருக்குத் தொகைச் சார்பு :

$$\begin{aligned} M_x(t) &= Ee^{tx} \\ &= \Sigma\, e^{tx}\, p(x) \\ &= 1.\ (1-p) + e^t\, p. \\ &= 1-p + e^t\, p \end{aligned}$$

ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial distribution) : ஒரு முயற்சி திரும்பத்திரும்ப n முறை மேற்கொள்ளப்படுகிறது. முயற்சியின் விளைவு இருவிதமாக ஏற்படலாம். அதாவது முயற்சியின் விளைவாக ஒரு நிகழ்ச்சி நடக்கலாம் அல்லது அந்நிகழ்ச்சி நடக்காமலிருக்கலாம். முயற்சியின் விளைவு நிகழ்ச்சியாக இருந்தால் அது வெற்றியென குறிக்கப்படுகிறது. நடவாதது தோல்வியென குறிக்கப்படுகிறது. n முறைகள் முயற்சி திரும்பத்திரும்ப சார்பற்ற முறையில் மேற்கொள்ளப்பட்டு கிடைக்கும் வெற்றிகளின் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவல் எனப்படுகிறது. முயற்சியின் விளைவு வெற்றியாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு p என்றிருக்கட்டும். எனவே முயற்சி தோல்வியாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $(1-p) = q$. X என்பது n முயற்சிகளின் விளைவாக கிடைக்கும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையென்றால் X-ன் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவல் எனப்படுகிறது. X-ன் மிகக் குறைந்த மதிப்பு '0' ஆகும், மிக அதிகமான மதிப்பு 'n' ஆகும்.
$p(X = 0) = q^n$ (எல்லா முயற்சிகளும் தோல்விகள்)

$p(X = 1) = nc_1\, pq^{n-1}$ (ஏதேனும் ஒன்று வெற்றி) பொதுவாக

$p(X = x) = nc_x\, p^x\, q^{n-x}$ $x = 0, 1, \ldots n$ இந்தச் சார்பு X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

X	P(x)
0	q^n
1	$nc_1\, p\, q^{n-}$
2	$nc_2\, p^2\, q^{n-2}$
3	$nc_3\, p^3\, q^{n-3}$
x	$nc_x\, p^x\, q^{n-x}$
n	p^n
கூடுதல்	1

மேற்குறித்த பட்டியல் X-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல் எனப்படுகிறது.

X-ன் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் :

$$\overline{X} = EX = \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= \Sigma\, x\, nc_x\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= 0.\, q^n + 1\, nc_1\, p\, q^{n-1} + \ldots \qquad np^n$$

$$= np\left[q^{n-1} + (n-1)c_1\, p\, q^{n-2} + \ldots \qquad p^{n-1}\right]$$

$$= np\,(q+p)^{n-1}$$

$$= np$$

$$EX^2 = E[X(X-1) + X]$$

$$= EX\,(X-1) + EX$$

$$EX\,(X-1) = \Sigma\, x\,(x-1)\, nc_x\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= 0 + 0 + 2.1\, nc_2\, p^2\, q^{n-2} + 3.2\, nc_3\, p^3\, q^{n-3}$$

$$+ 4.3\, nc_4\, p^4\, q^{n-4} + \ldots + n(n-1)\, p^n$$

$$= n(n-1)p^2\,[\,q^{n-2} + (n-2)p\, q^{n-3}$$

$$+ (n-2)c_2\, p^2\, q^{n-4} + \ldots + (n-2)c_{n-2}\, p^{n-2}\,]$$

$$= n(n-1)p^2\,(q+p)^{n-2}$$

$$= n(n-1)\, p^2$$

$$\therefore EX^2 = EX\,(X-1) + EX$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$\therefore \text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np\,(1-p)$$

$$= np\, q$$

$$\sigma = \sqrt{np\, q}$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் சுட்டுறுப்புகள் 'n', 'p' என்ற இரண்டாகும். எனவே n, p என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி np, ஆகும்; மாறுபாடு npq ஆகும்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : $EX = np$, $\mu^2 = npq$ என முன்னரே கண்டு பிடித்துள்ளோம். இனி μ_3, μ_4 ஐக் காண்போம்.

$\mu'_3 = EX^3 = E[X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X]$ முன்னரே $EX = np$, $EX(X-1) = n(n-1)p^2$ எனக்கண்டுள்ளோம். எனவே $EX(X-1)(X-2)$ஐ கணிக்க வேண்டும். $E[X(X-1)(X-2)] = 0 + 0 + 0 + 3.2.1\, nc_3\, p^3 q^{n-3} + \ldots + \ldots n(n-1)(n-2)p^3$

$$= n(n-1)(n-2)p^3 (q+p)^{n-3}$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3$$
$$\therefore \mu_3 = EX(X-1)(X-2) + 3EX(X-1) + EX$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$
$$\mu'_4 = EX^4$$

X^4ஐ $X^4 = X(X-1)(X-2)(X-3) + A\,X(X-1)(X-2) + BX(X-1) + CX + D$ என எழுதி A, B, C, D ஆகிய நிலையெண்களை இருபக்க குணகங்களை சமன்படுத்தி காண வேண்டும். இந்த முறையில் $A = 6$, $B = 7$, $C = 1$, $D = 0$ எனக்கிடைக்கும். எனவே $EX^4 = EX(X-1)(X-2)(X-3) + 6\,EX(X-1)(X-2) + 7\,EX(X-1) + EX$ ஆகும். $EX(X-1)(X-2)(X-3) = n(n-2)(n-3)(n-1)p^4$ என சுலபமாக கண்டு பிடித்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \mu'_4 = EX^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6\,n(n-1)(n-2)p^3 + 7\,n(n-1)p^2 + np$$

அடுத்து μ'_1, μ'_2, μ'_3, μ'_4ஐப் பயன்படுத்தி முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்போம்.

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = npq$ என முன்னரே கண்டுள்ளோம்.

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\,\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3 + 3\,n(n-1)p^2 + np - 3\{n(n-1)p^2 + np\}np + 2(np)^3$$
$$= np\,[(n-1)(n-2)p^2 + 3(n-1)p + 1 - 3\{n^2p^2 - np^2 + np\} + 2n^2p^2]$$

$$= np[n^2p^2 - 3np^2 + 2p^2 + 3np - 3p + 1 - 3n^2p^2 + 3np^2 - 3np + 2n^2p^2]$$
$$= np[3np(1-p) + 2p^2 - 3p + 1 - 3npq]$$
$$= np[2p^2 - 3p + 1]$$
$$= np[2p^2 - 2p + 1 - p]$$
$$= np[-2pq + q]$$
$$= npq[1-2p]$$
$$= npq[1-p-p] = npq[q-p]$$

இதே போன்று $\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4$ என்ற வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி $\mu_4 = npq[1 + 3(n-2)pq]$ எனக் காட்டலாம்.

இந்த முறையில் மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை காண்பதற்கு பதில் பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பை பயன் படுத்தி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் காணலாம். அல்லது மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை இணைக்கும் ஒரு சமன் பாட்டை பயன்படுத்தி சுலபமாக மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை களைக் காணலாம். அந்த சமன்பாடாவது :

$$\mu_{r+1} = pq\left[n.r\,\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp}\right]$$

முதலில் இந்தச் சமன்பாட்டை நிரூபிக்கலாம்.

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{n}(x-np)^r nc_x\, p^x q^{n-x} \qquad \text{(வரையறை)}$$

$$\frac{d\mu_r}{dp} = \Sigma\left[r(x-np)^{r-1}(-n)\, nc^x\, p^x q^{n-x}\right.$$
$$\left. + (x-np)^r nc_x\, x p^{x-1} q^{n-x} + (x-np)^r nc_x\, p^x (n-x)\, q^{n-x-1}(-1)\right]$$

$$pq\frac{d\mu_r}{dp} = \Sigma\left[r(x-np)^{r-1}(-n)\, nc_x\, p^x q^{n-x} p\, q\right.$$
$$\left. + (x-np)^r nc_x\, x\, p^x q^{n-x} q + (x-np)^r nc_x\, p^x (n-x) q^{n-x}(-1)\, p\right]$$

$$= \Sigma\left[r(x-np)^{r-1}(-n)\, nc_x\, p^x q^{n-x} p\, q\right.$$

$$+ (x-np)^r nc_x\, p\, q^{n-x} (x\, q + \overline{n-x}\, p) \Big]$$

$$= \Sigma \Big[-nr\, pq\, (x-np)^{r-1} nc_x\, p^x q^{n-x}$$

$$+ (x-np)^r nc_x\, p^x q^{n-x} (x-np) \Big]$$

$$= -nr\, pq\, \Sigma\, (x-np)^{r-1} nc_x\, p^x q^{n-x}$$

$$+ \Sigma\, (x-np)^{r+1} nc_x\, p^x q^{n-x}$$

$$= -nr\, pq + \mu_{r+1}$$

$$\therefore \mu_{r+1} = pq \left[nr\, \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right]$$

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளிடையே உள்ள உறவைப் பயன்படுத்தி மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை சுலபமாகக் காணலாம்.

$$\text{எந்தப் பரவலுக்கும் } \mu_0 = 1, \ \mu_1 = 0$$

$$\text{எனவே } \frac{d\mu'}{dp} = 0$$

$$\mu_{r+1} = p\, q \left[n.\ r.\ \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dp} \right]$$

என்ற உறவில் $r = 1$ எனக் கொள்வோமானால்

$$\mu_2 = p\, q \left[n.\ 1.\ \mu_0 + \frac{d\mu_1}{dp} \right]$$

$$= p\, q\, [n.\ 1.\ 1 + 0]$$

$$= n\, p\, q$$

$$\frac{d\mu_2}{dp} = n[q - p]$$

$r = 2$ எனக் கொள்வோமென்றால்

$$\mu_3 = p\, q \left[n.\ 2.\ \mu_1 + \frac{d\mu_2}{dp} \right]$$

$$= pq\,[\,n.\,2.\,0. + n(q-p)\,]$$

$$= npq\,(q-p) = npq\,(1-2p)$$

$$\frac{d\mu_3}{dp} = n\,[\,q(1-2p) + p(-1)\,(1-2p) + pq(-2)\,]$$

$$= n[q-2pq-p + 2p^2-2pq] = n[q-p-4pq + 2p^2]$$

$r = 3$ எனக் கொள்வோமென்றால்

$$\mu_4 = pq\left[\,n.\,3.\,\mu_2 + \frac{d\mu_3}{dp}\,\right]$$

$$= pq[\,n.\,3.\,npq + n(q-p-4pq + 2p^2)\,]$$
$$= npq[\,3npq + q-p-4pq + 2p^2\,]$$
$$= npq\,[\,3npq + 1-2p-4pq + 2p^2\,]$$
$$= npq\,[\,3npq + 1-2p\,(1-p)-4pq\,]$$
$$= npq\,[\,3npq + 1-6pq\,]$$
$$= npq\,[\,1 + 3\,(n-2)pq\,]$$

பரவலுக்குரிய பீட்டா, காமா கெழுக்கள் :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$= \frac{n^2p^2q^2\ (q-p)^2}{n^3p^3q^3}$$

$$= \frac{(q-p)^2}{npq}$$

$\beta_1 = 0$ என்றிருந்தால் பரவல் சமச்சீரானது என்கிறோம். எனவே $p = q(= \frac{1}{2})$ என்றிருக்கும்போது ஈருறுப்புப் பரவல் சமச்சீர் பரவலாயிருக்கும்.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$= \frac{npq[\,1 + 3(n-2)pq\,]}{n^2p^2q^2}$$

$$= \frac{1 + 3(n-2)\, pq}{npq}$$

$$= 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$$

$$= \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

$$= \frac{1-6\, pq}{npq}$$

γ_2 பரவலின் கோட்ட அளவையாக கருதப்படும்.

பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பு :

$$M(t) = E\, e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, nc_x\, p^x q^{n-x}$$

$$M(t) = \sum_{x=0}^{n} nc_x\, (Pe^t)^X\, q^{n-x}$$

$$= (q + Pe^t)^n$$

கூட்டுச் சராசரியை மையமாகக் கொண்ட பெருக்குத் தொகைச் சார்பு.

$$M_x(t) = E\, e^{t(x - \bar{x})}$$

$$= e^{-t\bar{x}}\, E\, e^{tx}$$

$$= e^{-tnp}(q + pe^t)^n$$

பரவலின் குவிவுச் சார்பு :

$$K(t) = \log M_0(t)$$

$$= \log (q + pe^t)^n$$

$$= n \log (q + pe^t)$$

$$= n \log \left[q + p\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\right]$$

$$= n \log \left[q + p + p\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\right]$$

$$= n \log \left[1 + p\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\right]$$

$$= n \left[p\left(\frac{t}{1!} + \cdots\right) - \frac{p^2}{2}\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}\right) +^2 \cdots \right]$$

$K_1 = \frac{t}{1!}$ இன் குணகம்

$= n\,p$

$K_2 = \frac{t^2}{2!}$ இன் குணகம்

$= npq$

$K_3 = \frac{t^3}{3!}$ இன் குணகம்

$= npq\,(q - p)$

$K_4 = \frac{t}{4!}$ இன் குணகம்

$$= 4!\,n\left[\frac{p}{4!} - \frac{p^2}{2!}\left(\frac{2}{3!} + \frac{1}{4}\right) + \frac{p^3}{3}\cdot\ \frac{3}{2!} - \frac{p^4}{4}\right]$$

$$K_4 = 4!\,n\frac{p}{4!}\left[1 - 7p + 12\,p^2 - 6\,p^3\right]$$

$$= np\,(1 - p)\,(1 - 6\,p + 6\,p^2)$$

$$= npq\,[1 - 6\,p\,(1 - p)]$$

$$= npq\,[1 - 6pq]$$

குவிவுகளுக்கிடையே உள்ள உறவு.

$$K_{r+1} = pq \frac{dk_r}{dp}$$

$$K_{r+1} = \left[\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} \log (q + pe^t)^n\right]_{t=0}$$

$$= n\left[\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} \log (q + pe)^t\right]_{t=0}$$

$$= n\left[\frac{d^r}{dt^r} \frac{d}{dt} \log (q + pe)^t\right]_{t=0}$$

$$= n\left[\frac{d^r}{dt^r} \frac{pe^t}{(q+pe^t)}\right]_{t=0}$$

$$= n\left[\frac{d^r}{dt^r} \frac{q + pet - q}{(q + pet)}\right]_{t=0}$$

$$= n\left[\frac{d^r}{dt^r}\left(1 - \frac{q}{q + pet}\right)\right]_{t=0}$$

$$= -nq\left[\frac{dr}{dtr} \frac{q + pet}{t}\right]_{t=0} \left(\because \frac{dr}{dtr}(1) = 0\right)$$

$$Kr = \left[\frac{d^r}{dt^r} \log\left((q + pet)^n\right)\right]_{t=0}$$

$$= n\left(\frac{d^r}{dt^r} \log\left(q + pe^t\right)\right)_{t=0}$$

$$\frac{dK_r}{dp} = n\left(\frac{d^r}{dt^r} \cdot \frac{d}{dp} \log\left(q + pe^t\right)\right)_{t=0}$$

$$= n\left(\frac{d^r}{dt^r} \frac{-1 + et}{(q + pet)}\right)_{t=0}$$

$$\therefore K_{r+1} - pq\frac{dk_r}{dp} = -nq\left[\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{1}{q + pe^t}\right)\right]_{t=0}$$

$$- npq\left[\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{e^t - 1}{q+pe^t}\right)\right]_{t=0}$$

$$= -nq\left[\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{1}{q+pe^t}+\frac{p(e^t-1)}{q+pe^t}\right)\right]_{t=0}$$

$$= -nq\left[\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{1}{q+pe^t}+\frac{pe^t+q-q-p}{q+pe^t}\right)\right]_{t=0}$$

$$= -nq\left[\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{1}{q+pe^t}+1-\frac{1}{q+pe^t}\right)\right]_{t=0}$$

$$= -nq\left[\frac{d^r}{dt^r}(1)\right]_{t=0}$$

$$= 0$$

$$\therefore K_{r+1} = pq\frac{dK_r}{dp}$$

இந்த உறவைப் பயன்படுத்தி குவிவுகளை சுலபமாகக் கணக்கிடலாம்.

$K_1 = EX = np$

$$\therefore \frac{dK_1}{dp} = n$$

$r = 1$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$K_2 = pq\frac{dK_1}{db}$$

$$= pq.\, n$$

$$\frac{dK_2}{dp} = n(q-p)$$

$r = 2$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$K_3 = pq\frac{dK_2}{dp}$$

$$= pq\, n(q-p)$$

$$= npq\,(q-p)$$

$$= npq\,(1-2p)$$

$$\frac{dk_3}{dp} = n\left[(1-2p) + p(1-2p)(-1) + pq(-2)\right]$$

$$= n\,[\,q-2pq + p-2p^2 - 2pq\,]$$
$$= n\,[\,1-4pq-2p^2\,]$$

$r = 3$ எனக் கொள்வோமானால்

$$K_4 = pq\frac{dk_3}{dp}$$
$$= pq.\,n\,(1 - 4\,pq-2p^2)$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடு :

$(r + 1)$ வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவு $= nc_{r+1}p^{r+1}\,q^{n-r-1}$

(r) ,, ,, $= nc_r p^r q^{n-r}$

$$\frac{p(r + 1)}{p(r)} = \frac{n!}{(r + 1)!\,(n-r-1)!}\,p^{r+1}\,q^{n-r-1}\;\frac{r!\,(n-r)!}{n!}\,p^r q^{n-r}$$
$$= \frac{n-r}{r+1}\,.\;\frac{p}{q}$$

$p(r + 1) > p(r)$ என்றால் $(n-r)p > (r + 1)q$

அதாவது $np- q > r(p + q)$

அதாவது $r < np - q$

எனவே $r < np - q$ என்றிருந்தால்
$p(r + 1) > p(r)$ என்றிருக்கும்.

$r = np - q$ என்றிருந்தால் $p(r + 1) = p(r)$ என்றிருக்கும். $r > np - q$ என்றிருந்தால் $p(r + 1) < p(r)$ என்றிருக்கும்.

பிரிவு 1 : $np-q = I + f$ (முழு எண் + பின்னம்) என்றிருக்கட்டும்.

$r = 0$ என்றால் $r < np-q$, $\therefore p(1) > p(0)$

$r = 1$,, $r < np-q$, $\therefore p(2) > p(1)$

$r = 2$ என்றால் $r < np-q$, $\therefore p(3) > p(2)$

$r = I$ என்றால் $r < np-q$, $\therefore p(I + 1) > p(I)$

$r = I + 1$ என்றால் $r > np-q$, $\therefore p(I + 2) < p(I + 1)$

எனவே $p(I+1)$ மிகப் பெரிய நிகழ்தகவாயிருக்கும். அதாவது $I+1$ பரவலின் முகடாகும்.

பிரிவு 2 : $np-q = I$ முழு எண்

$r = 0$ என்றால் $r < np-q$, $\therefore p(1) > p(0)$

$r = I$,, $r = np-q$, $\therefore p(I+1)\ p = I)$

$r = I+1$,, $r > np-q$, $\therefore p(I+2) < p(I+1)$

இங்கு இரு நிகழ்தகவுகள் சமமானவையாக எல்லாவற்றிற்கும் மேலானவையாக உள்ளது. எனவே $np\text{-}q = I$ என்ற முழு எண்ணாக இருந்தால் I, $I+1$ என்ற இரு முகடுகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு கணக்கு : $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலின் முகடைக் காண்க.

விடை : $np\text{-}q = 5\text{-}\frac{1}{2} = 4{\cdot}5$ என்ற பின்னமாகும். எனவே முதற்பிரிவின்படி $I+1 = 4+1 = 5$ என்பது பரவலின் முகடாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு ஈருறுப்புப் பரவல் பொருத்தும் முறை : கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவல் ஒரு ஈருறுப்புப் பரவல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்துள்ள சம வாய்ப்புக்கூறு என அனுமானித்துக் கொள்கிறோம். இதன் இரு சுட்டுறுப்புகள் n, p ஆகியவை மதிப்பிடப்பட வேண்டும். பரவலின் முழுமைத் தொகுதியின் அலைவெண் பரவலில் உள்ள பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை $(n+1)$ ஆக இருக்கும். $(x = 0, 1, 2, 3, \ldots n)$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலில் உள்ள பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்றைக் கழித்தால் 'n'-ன் மதிப்பு கிடைக்கும். ஈருறுப்புப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி np ஆதலால் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை np-க்கு சமப்படுத்தி 'p'ஐ மதிப்பிட வேண்டும். இந்த சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பை பயன்படுத்தி முதலில் பிரிவுகளுக்குரிய நிகழ்தகவைக் கணிக்க வேண்டும். இந்த நிகழ்தகவுகளை கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலின் கூடுதல் 'N' ஆல் பெருக்கி பிரிவுகளுக்குரிய எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிட வேண்டும். இவற்றைக் பின்கண்டபடி பட்டியலாக அமைக்கலாம்.

பிரிவுகள் X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்
0	q^n	$N q^n$
1	$nc_1\ pq^{n-1}$	$N\ nc_1\ pq^{n-1}$
2	$nc_2\ p^2q^{n-2}$	$N\ nc_2\ p^2q^{n-2}$
3	$nc_3\ p^3q^{n-3}$	$N\ nc_3\ p^3q^{n-3}$
......	......	......
n	p^n	$N p^n$
கூடுதல்	1	N

எடுத்துக்காட்டு கணக்குகள் :

1. ஒரு பகடையை வீசுவதில் 1 அல்லது 2 கிடைத்தால் வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது. பகடையை 10 முறை வீசினுல் a) 5 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்குரிய b) குறைந்தது இரு வெற்றிகளுக் குரிய நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுக.

விடை : X என்பது சோதனையில் கிடைக்கும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும். X எடுக்கும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, ... 10 ஆகும்.

a) 5 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்ச்சி X = 5 என்ற மதிப்பை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியாகும்.

X என்ற வாய்ப்பு மாறி n = 10, $p = \frac{1}{3}$ என்ற சுட்டுறுப்புகளை உடைய ஈருறுப்புப் பரவல் விதிப்படி நடக்கிறது. எனவே X-ன் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(X = x) = 10c_x\ (\frac{1}{3})^x\ (\frac{2}{3})^{10-x}$, x=0, 1,...10
எனவே 5 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு = p(X = 5)

$$= 10c_5\ (\tfrac{1}{3})^5\ (\tfrac{2}{3})^5$$

b) குறைந்தது இரு வெற்றிகள் என்ற நிகழ்ச்சி X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, அல்லது 10 ஆகிய மதிப்புகள் எடுக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கிறது. எனவே X=0, 1 ஆகிய மதிப்புகள் எடுக்கும் நிகழ்தகவை ஒன்றிலிருந்து கழித்தால் நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு கிடைக்கும்.

குறைந்தது இரு வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவு

$$= 1 - p(x = 0 \text{ அல் } 1)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} 10c_x\ (\tfrac{1}{3})^x\ (\tfrac{2}{3})^{10-x}$$

2. ஒரு பிழற்ச்சியற்ற நாணயத்தை 6 முறை சுண்டும் சோதனை திரும்பத்திரும்ப 128 முறை நடத்தப்பட்டது. எத்தனை முறை 2 தலைகள் கிடைக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம்.

விடை : X என்பது 6 முறை நாணயத்தை சுண்டும்போது கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும். X எடுக்கும் மதிப்புகள் முறையே 0, 1, 2, … 6 ஆகும். X, $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புகளை உடைய ஈருறுப்புப் பரவல் விதிப்படி நடக்கிறது. 2 தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $X = 2$ என்ற மதிப்பை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கிறது,

2 தலைகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $= 6c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$$= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{15}{64}$$

இதே சோதனை 128 முறை திரும்பத்திரும்ப நடைபெற்றால் 2 தலைகள் $128 \times \frac{15}{64} = 30$ முறை கிடைக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம்.

3. கணக்கு 2-இல் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 தலைகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவையும் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களையும் கணக்கிடுக.

விடை :

தலைகள் X	நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$	$128 \times \frac{1}{64} = 2$
1	$6c_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64}$	$128 \times \frac{6}{64} = 12$
2	$6c_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$	$128 \times \frac{15}{64} = 30$
3	$6c_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64}$	$128 \times \frac{20}{64} = 40$
4	$6c_4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$	$128 \times \frac{15}{64} = 30$
5	$6c_5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64}$	$128 \times \frac{6}{64} = 12$
6	$6c_6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$	$128 \times \frac{1}{64} = 2$
கூடுதல்	1	128

4. 8 ஒரே மாதிரியான நாணயங்கள் 256 தடவைகள் வீசப் பட்டதில் கிடைத்த விவரங்கள் கீழே அலைவெண் பரவலாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்குரிய பரவலைப் பொருத்துக.

தலைகள்	அலைவெண்
0	2
1	6
2	24
3	63
4	64
5	50
6	36
7	10
8	1
கூடுதல்	256

விடை : X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறித்தால் X-ன் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவலாகும். $n = 8$. பரவலின் சுட்டுறுப்பு pஐ மதிப்பிட வேண்டும். அலைவெண் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரியை $np = 8p$ என்ற மதிப்பிற்கு சமப்படுத்தி pஐ மதிப்பிடவேண்டும்.

x	f	d = x — 4	f d
0	2	—4	− 8
1	6	—3	−18
2	24	—2	−48
3	63	—1	−63
4	64	0	0
5	50	1	50
6	36	2	72
7	10	3	30
8	1	4	4
கூடுதல்	256		156 − 137 = 9

$$\text{பரவலின் கூட்டுச் சராசரி} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

$$= 4 + \frac{9}{256}$$

$$= 4 \cdot 035$$

$$\therefore \quad 8P = 4 \cdot 035$$

$$\hat{P} = \frac{4 \cdot 035}{8}$$

$$= \cdot 5$$

$$= \frac{1}{2}$$

கொடுக்கப்பட்ட கூறு $n = 8$ $p = \frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்துள்ளது என அனுமானித்துக் கொள்கிறோம். இத்தகைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 256 உருவ அளவுள்ள கூறினை பிரிவுகளின் நிகழ்தகவுகளுக்கேற்ப கீழ்க்கண்டவாறு பிரித்து எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுகிறோம்.

X	P(x)	எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்கள்
0	$8C_0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^8 = 1/256$	$256 \times \frac{1}{256} = 1$
1	$8C_1 (\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})^7 = 8/256$	$256 \times \frac{8}{256} = 8$
2	$8C_2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^6 = 28/256$	$256 \times 28/256 = 28$
3	$8C_3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^5 = 56/256$	$256 \times 56/256 = 56$
4	$8C_4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^4 = 60/256$	$256 \times 60/256 = 60$
5	$8C_5 (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^3 = 56/256$	$256 \times 56/256 = 56$
6	$8C_6 (\frac{1}{2})^6 (\frac{1}{2})^2 = 28/256$	$256 \times 28/256 = 28$
7	$8C_7 (\frac{1}{2})^7 (\frac{1}{2}) = 8/256$	$256 \times 8/256 = 8$
8	$8C_8 (\frac{1}{2})^8 = 1/256$	$256 \times 1/256 = 1$
கூடுதல்	1	256

5. n, p ஆகிய சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலின் பூச்சியத்தை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப்பெருக்குத் தொகை $\mu'_r = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^r (p+q)^n$ என நிறுவுக.

விடை : வலப்பக்கம் $= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^r (p+q)^n$

$p = e^t$ எனக் கொள்க

$\Rightarrow dp = e^t\, dt$

$\Rightarrow \frac{dp}{p} = dt$

$\Rightarrow p\frac{\partial}{\partial p} = \frac{6}{\partial t}$

இப்போது $\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^r (p+q)^n = \left(\frac{\partial}{dt}\right)^r \left(e^t + q\right)^n$

$$= \frac{\partial^r}{\partial t^r}(e^t + q)^n$$

$$= \frac{\partial^r}{\partial t^r}\left\{e^{nt} + ne^{(n-1)t}q + \ldots\ldots\right\}$$

$$= n^r e^{nt} + nc_1\,(n-1)^r q + nc_2\,(n-2)^r e^{(n-2)t} + \ldots$$

$$= \sum_{x=0}^{n} nc_x\,(n-x)^r\,(e^t)^{n-x} q^x$$

$$= \Sigma\, nc_x\,(n-x)^r p^{n-x} q^x$$

$n - x = s$ எனக் கொள்க

$$= \sum_{s=0}^{n} nc_{n-s}\, s^r\, p^s q^{n-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} s^r nc_s\, p^s q^{n-s}$$

$$= \mu'_r$$

எனவே $\mu'_r = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^r (p+q)^n$ என நிரூபணமாகிறது.

5. ஒரு குண்டு வீச்சில் குண்டு இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{5}$. ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டையைத் தாக்கி நிர்மூல மாக்குவதற்கு குறைந்தது 2 குண்டுத் தாக்குதல்கள் தேவை என்றால் அந்தக் கோட்டையை குறைந்து 0·95 நிகழ்தகவுடன் தாக்கி நிர்மூல மாக்குவதற்கு எத்தனை குண்டுகள் வீசப்பட வேண்டும்?

விடை : n குண்டுகள் கோட்டையை குறைந்தது 0·95 நிகழ் தகவுடன் நிர்மூலமாக்குவதற்கு தேவை என அனுமானித்துக் கொள்வோம். n குண்டு வீச்சுக்களில் கோட்டையைத் தாக்கும் குண்டுகளின் எண்ணிக்கை X என இருக்கட்டும். X என்ற வாய்ப்பு மாறி n = n, p = $\frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவல் விதிப்படி நடக்கிறது. கோட்டையை நிர்மூலமாக்க குறைந்தது இரு குண்டடிகள் தேவை. அதாவது X-ன் மதிப்பு ≥ 2 என இருக்க வேண்டும்.

$$\text{எனவே } p(X \geq 2) \geq \cdot 95$$

$$\sum_{x=2}^{n} nc_x (\tfrac{1}{2})^x \, (\tfrac{1}{2})^{n-x} \geq \cdot 95$$

$$\text{அதாவது } 1 - \sum_{x=0}^{1} nc_x \, (\tfrac{1}{2})^x (\tfrac{1}{2})^{n-x} \geq \cdot 95$$

$$,, \quad (\tfrac{1}{2})^n + n(\tfrac{1}{2})^n \leq \cdot 05$$

$$,, \quad (\tfrac{1}{2})^n (1 + n) \leq \cdot 05$$

$$,, \quad n \geq 8$$

எனவே கோட்டை நிர்மூலமாக்கப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தது 0·95 என்றிருக்க குறைந்தது 8 குண்டுகள் வீசப்பட வேண்டும்.

6. ஒரு குண்டு வீச்சில் குண்டு இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு ·6 என்றால் ·95 நிகழ்தகவு உறுதியுடன் அந்த இலக்கு தாக்கப்படுவதற்கு குறைந்தது எத்தனை குண்டுகள் வீசப்பட வேண்டும்?

விடை : தேவைப்படும் குறைந்த குண்டுகளின் எண்ணிக்கை 'n' என்றிருக்கட்டும். X என்பது n குண்டுகளில் இலக்கைத் தாக்கும் குண்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும். X-ன்

பரவல் n, ·6 என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலாகும். இலக்கு தாக்கப்படுவது ஒன்றிலிருந்து எல்லா n குண்டுகளாக இருக்கலாம். இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தது 0·95 என்றிருக்க வேண்டுமென்றல் கீழ்க்கண்ட சமமின்மை கிடைக்கும்.

$$\sum_{x=1}^{n} nc_x\ (\cdot 6)^x\ (\cdot 4)^{n-x} \geq \cdot 95$$

அதாவது $1 - (\cdot 6)^n \geq \cdot 95$

,, $(\cdot 6)^n \leq \cdot 05$

,, $n \geq 3$

குறைந்தது 3 குண்டுகள் வீசப்பட வேண்டும்.

பயிற்சி

1. 6 ஒரே மாதிரியான பகடைகள் 72 முறை வீசப்பட்டன. இரட்டைப்படை எண்கள் கிடைப்பது வெற்றியென கருதப்பட்டால் a) இரு வெற்றிகள் கிடைப்பதற்குரிய b) குறைந்தது 4 வெற்றிகள் கிடைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

2. ஒவ்வொரு பாத்தியிலும் 10 விதைகள் வீதம் 100 பாத்திகளில் விதைகள் ஊன்றப்பட்டன. விதை முளைப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு ·8 என்றல் a) 6 விதைகள் முளைத்துள்ள b) குறைந்தது 8 விதைகள் முளைத்துள்ள c) கூடியது 5 விதைகள் முளைத்துள்ள பாத்திகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

3. X என்ற ஈருறுப்பு வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 2·4, மாறுபாடு 1·44 என்றல் $X \geq 3$, $1 < X \leq 3$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

4. ஏராளமான ஆரஞ்சுப் பழங்கள் உள்ள குவியலில் 10 சதவீதம் பழுதுள்ள பழங்கள். குவியலிலிருந்து ராண்டமாக 10 பழங்கள் எடுக்கப்பட்டன. அவற்றில் (அ) 3 பழங்கள் பழுதாயிருப்பதற்குரிய (ஆ) குறைந்தது 8 பழங்கள் பழுதாயிருப்பதற்குரிய (இ) கூடியது 3 பழங்கள் பழுதாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் காண்க.

5. X என்ற ஈருறுப்பு மாறியின் ஒரு சுட்டுறுப்பு $n=6$. மேலும் $9\,P(X=4)=P(X=2)$ என்பது உண்மையானுல் அதன் இரண்டாவது சுட்டுறுப்பைக் காண்க.

6. $n=10$, $P=\frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புகளை உடைய ஒரு ஈருறுப்பு மாறியின் முகட்டைக் காண்க.

7. ஒரு யந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் சவரக்கத்திகள் சராசரியாக 5 சதவீதம் பழுதுள்ளவையாயுள்ளன. 200 சவரக்கத்திகளாக அடைக்கப்பட்ட 100 பெட்டிகளில் எத்தனை பெட்டிகளில் 10 சவரக் கத்திகள் பழுதுள்ளவையாயிருக்கும் ?

8. ஒரு குவியலில் உள்ள பொருட்களில் 5 சதவீதம் பழுதுள்ளவையாயுள்ளன. 'n' உருவ அளவுள்ள கூறு ஒன்றில் குறைந்தது ஒரு பழுதுள்ள பொருள் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தது 0·95 என்றிருக்க வேண்டுமென்ருல் 'n'-ன் மதிப்பு என்ன ?

9. குண்டு வீச்சுத் தாக்குதலில் ஒரு குண்டு இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு 0·6. ஒரு கோட்டையைத் தாக்கி அழிப்பதற்கு குறைந்தது 2 குண்டுத் தாக்குதல்கள் தேவை. 0·99 நிகழ்தகவு உறுதியுடன் கோட்டையை அழிப்பதற்கு குறைந்தது எத்தனை குண்டுகள் வீசப்பட வேண்டும் ?

10. ஒரு உற்பத்தியாளர் கூடியது 10 சதவீதம் பொருட்கள் தான் அவர் உற்பத்தி செய்யும் பொருட்களில் பழுதுள்ளவையாயிருக்கும் என உறுதியளிக்கிருர். அவர் கூற்று உண்மையாயென சோதிக்க சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட 20 பொருட்கள் சோதிக்கப்பட்டு அவற்றில் கூடியது இரு பழுதுள்ள பொருட்கள் இருந்தால் அவர் கூற்று உண்மையென ஏற்றுக் கொள்வதென தீர்மானிக்கப்பட்டது. பொருள் பழுதுடையாதாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு (அ) 0·05 (ஆ) 0·10 என இருந்தால் அவர் கூற்றை உண்மையென ஏற்றுக் கொள்வதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

11. ஆறு ஒரே மாதிரியான நாணயங்கள் 640 முறை வீசப்பட்டு கிடைத்த விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தலைகளின் எண்ணிக்கை :	0	1	2	3	4	5	6
அலைவெண் :	7	64	140	210	132	75	12

இதற்குரிய ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

12. 4 குழந்தைகள் உள்ள 64 குடும்பங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்பட்டன.

ஆண் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
குடும்பங்கள்	3	13	24	19	5

இதற்குரிய ஈருறுப்புப் பரவலை பொருத்துக.

13. ஒரு விவசாயச் சோதனையில் 10 விதைகள் ஊன்றப்பட்ட பாத்திகளில் முளைத்த விதைகளின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

முளைத்த விதைகள்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
பாத்திகள்	6	20	28	12	8	6	6	4	0	0	0

விவரத்திற்குரிய பரவலைப் பொருத்துக.

14. X என்ற ஈருறுப்பு வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 5 என்றால் அதன் மாறுபாடு,

அ) 5-ஐ விட அதிகமாயிருக்கும்

ஆ) 5 ஆக இருக்கும்

இ) 5ஐ விட குறைவாயிருக்கும்

ஈ) மேற்கண்ட மூன்றுமே தப்பான விடைகள்

15. ஈருறுப்புப் பரவலின் இரு சுட்டுறுப்புகளும்

அ) ஒன்றைவிட குறைந்த எண்கள்

ஆ) ஒன்றைவிட அதிகமான எண்கள்

இ) ஒன்று பூச்சியத்தைவிட குறைவு, மற்றது அதிகம்

ஈ) ஒன்று நேர்மறை முழு எண், மற்றது ஒன்றைவிட குறை வான நேர்மறை பின்னம்

16. n, p என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை உற்பத்திச் சார்பு.

பல்லுறுப்புப் பரவல் (Multinomial Distribution) :

ஈருறுப்புப் பரவலில் ஒரு முயற்சியின் விளைவுகள் இரு விதமாக் இருந்தன. வெற்றி விளைவது P போன்ற நிகழ்தகவுடனும் தோல்வி விளைவது q(= 1 — p) என்ற நிகழ்தகவுடனும் இதே போன்று முயற்சியின் விளைவுகள் K ஆகவும் அவற்றின் நிகழ்தகவுகள்

முறையே P_1, $P_2 \ldots P_k$ ஆகவும் $(P_1 + P_2 + \ldots P_k = 1)$ இருந்தால் பல்லுறுப்புப் பரவல் கிடைக்கிறது. இத்தகைய n சார்பற்ற முயற்சிகளில் x_1 முதல் நிகழ்ச்சியாயும் x_2 இரண்டாம் நிகழ்ச்சியாயும், ... x_k K-ஆவது நிகழ்ச்சியாயும் விளைந்தால் $(x_1 + x_2 + x \ldots x_k = n)$ இதற்குரிய நிகழ்தகவு ஈருறுப்புப் பரவல் K விளைவுகளுக்கு விரித்துக் காணலாம்.

$$P(x_1, x_2 \ldots x_k) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} \quad P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$$

$$(P_1 + P_2 + \ldots P_k = 1,\ x_1 + x_2 + \ldots x_n = n)$$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : இப்பரவலுக்குரிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் அதற்குரிய சார்பிலிருந்து சுலபமாகக் காணலாம்.

$$M(t) = E\, e^{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots k_k t_k}$$

$$= \sum_x \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!} (P_1 e^{t_i})^{x_1} \ldots (P_k e^{t_k})^{x_k}$$

$$= (P_1 e^{t_i} + \ldots + P_k e^{t_k})^n$$

$$EX_i = \left[\frac{\partial M}{\partial t_i} \right]_{t=0}$$

$$= \left[n (P_1 e^{t_1} + \ldots + P_k e^{t_k})^{n-1} \quad P_i e^{t_i} \right]_{t=0}$$

$$= n P_i$$

$$EX_i^2 = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial t_i^2} \right]_{t=0}$$

$$= [\, (n-1) (P_1 e^{t_1} + \ldots P_k e^{t_k})^{n-2} P_i^2 e^{2t_i} +$$

$$P_i e^{t_i} (P_i e^{t_i} + \ldots P_k e^{t_k})^{n-1}]_{t=0}$$

$$= n(n-1) P_i^2 + n P_i$$

$$\text{Var } X_i = EX_i^2 - (EX_i)^2$$

$$= n(n-1) P_i^2 + n P_i - n^2 P_i^2$$

$$= nP_i + n^2 P_i^2 - n P_i^2 - n^2 P_i^2$$

$$= n P_i q_i$$

$$EX_iX_j = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial t_i \, \partial t_j}\right]_{t=0}$$

$$= n P_i \left[(n-1) (P_1 e^{t_1} + \ldots + P_k e^{t_k})^{n-2} e^{ti} P_j e^{tj} \right]_{t=0}$$

$$= n(n-1) \quad P_i P_j$$

$$Cov(X_i, X_j) = n(n-1) \quad P_i P_j - n P_i n P_j$$

$$= n^2 P_i P_j - n P_i P_j - n^2 P_i P_j$$

$$= - n P_i P_j$$

பாய்ஸான் பரவல் (Poisson Distribution) : ஈருறுப்புப் பரவலின் ஒருங்குப் பரவலாக (limiting distribution) பாய்ஸான் பரவல் கிடைக்கிறது. ஈருறுப்புப் பரவல் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட்படும் போது பாய்ஸான் பரவலாக ஒருங்குகிறது.

1. P மிகச் சிறிதாக இருக்க வேண்டும்.

2. nP (=m) ஒரு திட்டமான எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

3. n மிகப் பெரிதாக இருக்க வேண்டும்.

இந்த மூன்று நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு ஈருறுப்புப் பரவல் 'm' என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் பரவலாக ஒருங்குகிறது. பாய்ஸான் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots \propto$$

இது ஒரு தொடர்ச்சியற்ற வாய்ப்பு மாறியாகும்.

ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்ஸான் பரவலாக ஒருங்குவதற்கு நிரூபணம் :

$$f(x) = nc_x \, p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1) \ldots (n - x + 1) \ldots 1}{x! \quad (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{x! \left(1 - \frac{x}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)} (np)^x \; (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)m^x\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}{x!\left(1-\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n}\right)^x}$$

n அனந்தத்தை நோக்கி ஒருங்கும்போது (As $n \rightarrow \infty$)

$$f(x) \rightarrow \frac{1.\ m^x\ e^{-m}}{x!}$$

எனவே ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $\frac{e^{-m}\ m^x}{x!}$ ஆக ஒருங்குகிறது.

பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, மாறுபாடு :

$$EX = \sum_x x\, f(x)$$

$$= \sum_x x\, e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

$$= \sum_x e^{-m} \frac{m^x}{(x-1)!}$$

$$m = \sum_x e^{-m} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= m \times 1$$

$$EX^2 = E[X(X-1) + X]$$

$$= EX(X-1) + EX$$

EX முன்னரே கண்டு பிடித்துள்ளோம்.

$$EX(X-1) = \sum_x x(x-1)\, e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

$$= m^2 \ \Sigma \ e^{-m} \frac{m^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$= m^2 \times 1.$$

$$\text{மாறுபாடு} = EX^2 - (EX)^2$$

$$= m^2 + m - m^2$$

$$= m$$

பாய்ஸான் பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரியும் மாறுபாடும் ஒன்றுதான்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை சார்பு :

$$M(t) = E\, e^{tx}$$

$$= \Sigma\, e^{tx}\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!}$$

$$= \Sigma\, e^{-m}\, \frac{(m\, e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-m} \ldots e^{me^t}$$

$$= e^{me^{t-1}}$$

M(t)-யின் மடக்கை மதிப்பிலிருந்து குவிவுச் சார்பு கிடைக்கிறது.

$$\log M(t) = m(e^t - 1)$$

$$= m\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots \frac{t^r}{r!} + \ldots\right)$$

$\frac{t^r}{r!}$ -ன் குணகம் m ஆகும்.

எனவே பாய்ஸான் பரவலுக்கு எல்லா குவிவுகளும் m ஆகும்.

உண்மை வாழ்க்கையில் பாய்ஸான் பரவலை பின்பற்றும் சில நிகழ்ச்சிகள். மிக அரிதாக நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகள் யாவுமே பாய்ஸான் பரவலைப் பின்பற்றுகின்றன. உதாரணத்திற்கு கீழ்க் கண்ட நிகழ்ச்சிகள்.

1. தற்கொலை நிகழ்ச்சிகள்

2. விபத்துக்களில் ஏற்படும் இறப்புகள்

3. குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட எண்ணுள்ள டெலிபோனுக்கு வரும் அழைப்புகள்.

4. ஒரு பக்கத்திலுள்ள அச்சுப்பிழைகள்.

5. தேர்ந்த தட்டெழுத்துக்காரர் அடிக்கும் தட்டெழுத்துப் பக்கத்தில் உள்ள பிழைகள்.

பரவலின் முகடு :

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = e^{-m}\frac{m^{x+1}}{(x+1)!} + \frac{x!}{e^{-m}\, m^x}$$

$$= \frac{m}{x+1}$$

$m > x + 1$ என்றிருந்தால் $P(x + 1) > P(x)$ என்றிருக்கும்.
அதாவது $x < m-1$ என்றிருந்தால் $P(x + 1) > P(x)$ என்றிருக்கும்.

,,	$x = m-1$	,,	$P(x + 1) = P(x)$	என்றிருக்கும்
,,	$x > m-1$	,,	$P(x + 1) < P(x)$	,,

பிரிவு 1 : $m = I$ என்ற முழு எண்ணாக இருக்கட்டும்
$m-1 = I-1$ என்ற முழு எண்.

$x = 0$	என்றிருந்தால்	$x < m-1$ எனவே	$P(1) > P(0)$
$x = 1$	,,	$x < m-1$	$P(2) > P(1)$
$x = I-2$	,,	$x < m-1$	$P(I-1) > P(I-2)$
$x = I-1$	,,	$x = m-1$	$P(I) = P(I-1)$
$x = I$	,,	$x > m-1$	$P(I + 1) < P(I)$

எனவே $m = I$ என்ற முழு எண்ணாக இருக்கும்போது $P(I - 1)$, $P(I)$ ஆகிய இரு நிகழ்தகவுகள் மிகப் பெரியனவாயிருக்கும். எனவே I, $I-1$ ஆகிய இரு முகடுகள் இருக்கும்.

பிரிவு 2 : $m = I + f$ என்ற பின்னமாக இருக்கட்டும்.
$m-1 = I-1 + f$

$x = 0$	என்றிருக்கும்	$x < m-1$	$\therefore P(1) > P(0)$
$x = 1$	,,	$x < m-1$	$\therefore P(2) > P(1)$
$x = I-1$	,,	$x < m-1$	$\therefore P(I) > (PI-1)$
$x = I + 1$	,,	$x > m-1$	$\therefore P(I + 1 < P(I)$

எனவே $m = I + f$ என்ற பின்னமாயிருக்கும்போது $P(I)$ என்ற நிகழ்தகவு மிகப் பெரிதாயிருக்கும். எனவே I என்பது பரவலின் முகடாகும்.

பரவலுக்குரிய பண்பு : X என்பது m_1 என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய ஒரு பாய்ஸான் பரவலாகவும் Y என்பது m_2 என்ற சுட்டுறுப்பு உடைய ஒரு பாய்ஸான் பரவலாகவும் இருந்து X-ம், Y-ம் சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகளென்றால் $X + Y$, $m_1 + m_2$ என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய ஒரு பாய்ஸான் மாறியாகும்.

நிரூபணம் :
$$M_x(t) = e^{m_1(e^t - 1)}$$
$$M_y(t) = e^{m_2(e^t - 1)}$$
$$M_{x+y}(t) = M_x(t).\ M_y(t)$$
(X-ம், Y-ம் சார்பற்றவை)
$$= e^{(m_1+m_2)(e^t - 1)}$$

இது $(m_1 + m_2)$ என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பாகும். எனவே X + Y, $m_1 + m_2$ என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

கொடுத்துள்ள விவரத்திற்கு பாய்ஸான் பரவல் பொருத்தும் விதம் : கொடுத்துள்ள அலைவெண் பரவல் பாய்ஸான் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து வந்துள்ள ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு என அனுமானித்துக் கொள்கிறோம். எனவே மதிப்பிட வேண்டிய ஒரே சுட்டுறுப்பு m ஆகும். பாய்ஸான் பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரி m ஆகும். ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரியை m-ன் மதிப்பீடாக எடுத்துக் கொள்கிறோம். அதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளுக்குரிய நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டு பின்னர் அலைவெண்களின் கூடுதல் N-ஆல் பெருக்கி எதிர்பார்க்கும் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுகிறோம். நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிட $P(x+1) = \frac{m}{x+1} P(x)$ என்ற உறவைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு : கீழ்க்கண்ட விவரத்திற்கு பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

x	0	1	2	3	4	கூடுதல்
f	111	63	22	3	1	200

x	f	fx
0	111	0
1	63	63
2	22	44
3	3	9
4	1	4
கூடுதல்	200	120

$$\bar{x} = \frac{120}{200} = .60$$

$$\therefore \hat{m} = .60$$

$$e^{-\cdot 60} = \cdot 5488$$

$$P(0) = e^{-\cdot 6}$$

$$= \cdot 5488$$

$$P(1) = P(0) . \frac{m}{1} \left[\because P(x+1) = P(x) . \frac{m}{x+1} \right]$$

$$= P(0) . \cdot 6$$

$$= \cdot 5488 \times \cdot 6$$

$$= \cdot 3292$$

$$P(2) = P(1) \times \frac{\cdot 6}{2}$$

$$= \cdot 3292 \times \cdot 3$$

$$= \cdot 0988$$

$$P(3) = P(2) \times \frac{\cdot 6}{3}$$

$$= \cdot 0988 \times \cdot 2$$

$$= \cdot 0188$$

$$P(4) = P(3) \times \frac{\cdot 6}{4}$$

$$= \cdot 0188 \times \cdot 15$$

$$= \cdot 0028$$

x	P(x)	எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்
0	·5488	200 × ·5488 = 109·76 = 110
1	·3292	200 × ·3292 = 64·84 = 65
2	·0988	200 × ·0988 = 19·76 = 20
3	·0188	200 × ·0188 = 3·76 = 4
4	·0028	200 × ·0028 = 0·56 = 1
கூடுதல்	·9984	200

2. பாய்ஸான் பரவலின் மைய விலக்கப் பெருக்கத் தொகைகளுக்கிடையே உள்ள உறவை வரைந்து அதனின்று பரவலின் பீட்டா, காமாக் கெழுக்களைக் காண்க.

விடை : மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கிடையே உள்ள உறவானது $\mu_{r+1} = m\left(r.\ \mu_{r-1} + \dfrac{d\mu_r}{dm}\right)$

$$\mu_r = \sum_x (x\text{-}m)^r\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!}$$

$$\frac{d\mu_r}{dm} = \sum_x r\,(x\text{-}m)^{r-1}\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!} + \Sigma\,(x\text{-}m)^r\, e^{-m}\,(-1)\,\frac{m^x}{x!}$$

$$+ \Sigma\,(x-m)^r\, e^{-m}\, \frac{x\, m^{x-1}}{x!}$$

$$m\,\frac{d\mu_r}{dm} = mr\,\Sigma\,(x\text{-}m)^{r-1}\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!} + \Sigma\,(x\text{-}m)^r\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!}\,(-m)$$

$$+ \Sigma\,(x\text{-}m)^r\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!}\, x$$

$$= m\, r\, \mu_{r-1} + \Sigma\,(x\text{-}m)^r\, e^{-m}\, \frac{m^x}{x!}\,(x\text{-}m)$$

$$= m\, r\, \mu_{r-1} + \Sigma\, (x\text{-}m)^{r-1}\ e^{-m}\ \frac{m^x}{x!}$$

$$= m\, r\, \mu_{r-1} + \mu_{r+1}$$

$$\because\ \mu_{r+1} = m\left[r\, \mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{dm} \right]$$

எந்த வாய்ப்பு மாறிக்கும் $\mu_0 = 1\ \ \mu_1 = 0$

$$\therefore\ \frac{d\mu_1}{dm} = 0 \ \text{ ஆகும்.}$$

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கிடையே உள்ள உறவில் $r = 1$ எனக் கொள்வோமானால்,

$$\mu_2 = m\left[1.\ \mu_0 + \frac{d\mu_1}{dm} \right]$$

$$= m[1 + 0]$$

$$= m$$

$$\frac{d\mu_2}{dm} = 1$$

$r = 2$ எனக் கொள்வோமானால்

$$\mu_3 = m\left[2.\ \mu_1 + \frac{d\mu_2}{dm} \right]$$

$$= m\ [0 + 1]$$

$$= m$$

எனவே பாய்ஸான் பரவலுக்கு

$$EX = \mu_2 = \mu_3 = m \ \text{ ஆகும்.}$$

$r = 3.$ எனக் கொள்வோமானால்

$$\mu_4 = m\left[3.\ \mu_2 + \frac{d\mu_3}{dm} \right]$$

$$\mu_4 = m\ [3m + 1]$$

$$= 3m^2 + m$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$= \frac{m^2}{m^3}$$

$$= \frac{1}{m}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$= \frac{3m^2 + m}{m^2}$$

$$= 3 + \frac{1}{m}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{m}}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

$$= \frac{1}{m}$$

3. X m_1 என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறி, Y m_2 என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறி. X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளென்றால் X-Y ஒரு பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறியா எனக்காண்க.

விடை : X-ன் M. G. F. $= e^{m_1(e^t - 1)}$

Y-ன் M. G. F. $= e^{m_2(e^t - 1)}$

(X – Y)-ன் M. G. F. $= E\, e^{t(x-y)}$

$$= E\, e^{tx}\; e^{-ty}$$

$$= E\,e^{tx}\;E\,e^{-ty}$$

(X-ம், Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளாதலால்)

$$= e^{m_1(e^t - 1)}\;e^{m_1(e^{-t} - 1)}$$

கிடைக்கும் சார்பு பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறியின் M. G. F. போன்றல்லாமல் வேறு பட்டுள்ளது. எனவே X-Y ஒரு பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறியல்ல.

4. குண்டூசிகளை உற்பத்தி செய்யும் ஒரு உற்பத்தியாளருக்கு தனது உற்பத்தியில் 5% பழுதுள்ளவை எனத் தெரியும். அவர் 100 ஊசிகளடங்கிய பெட்டிகளாக விற்று ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 10 ஊசிகளுக்கு அதிகமாக பழுதிருக்காது என உறுதியளிக்கிறார் என்றால் ஒரு பெட்டி அவர் உறுதி மொழியைக் காப்பதற்கான தோராயமான நிகழ்தகவு என்ன? (மைசூர் ப. க. 64)

விடை : தோராயமான நிகழ்தகவிற்கு பாய்ஸான் பரவலைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இங்கு $n = 100 \quad p = \cdot 05$

எனவே $m = np = 5$

X என்பது பெட்டியிலுள்ள பழுதுள்ள ஊசிகள் என்றால் X என்ற வாய்ப்பு மாறி 5-ஐச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறியாகும் (தோராயமாக). பெட்டி உற்பத்தியாளரின் வாக்கைக் காப்பாற்ற வேண்டுமென்றால் பெட்டியிலுள்ள பழுதுள்ள ஊசிகளின் எண்ணிக்கை 10 அல்லது அதற்குக் குறைவாயிருக்க வேண்டும். எனவே $X \leq 10$ என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{10} e^{-5} \frac{5^x}{x!}$$

5. ஒரு ஸ்தாபனம் 2 கார்களை அன்றாடம் வாடகைக்கு விடுகிறது. கார்களுக்கான தேவை 1·5 என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் பரவல்படி நடக்கிறது. ஒரு காருமே பயன்படாத, நாட்களின் விகிதம், இரண்டிற்குமேல் கேட்கப்படுகிற நாட்களின் விகிதம் என்ன ?

விடை : X என்ற வாய்ப்பு மாறி ஒரு நாளில் அந்த ஸ்தாபனத்திடம் கேட்கப்படுகிற கார்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கட்டும். ஒரு காருமே பயன்படாத நாட்களின் விகிதத்தை கணக்கிட (X = 0) என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டால் போதும்.

X, 1·5 என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறி (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது-)

$$\therefore\ P(X = 0) = e^{-1\cdot5}$$

$$|||^{by}\ P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} e^{-1\cdot5}\frac{(1\cdot5)^{x}}{x!}$$

$$= 1 - \left[e^{-1\cdot5} + e^{-1\cdot5}\frac{(1\cdot5)}{1}\right]$$

பயிற்சி

1. ஒரு பிழற்ச்சியற்ற நாணயம் 10 முறை சுண்டப்பட்டால் ஆறு அல்லது அதிகமான தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? அதே நாணயம் 100 முறை சுண்டப்பட்டால் 90 அல்லது அதிகமான தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை தோராயமாகக் கணக்கிடு.

2. ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின் விளக்குகள் பழுதுடையதாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு ·01. அந்த நிறுவனம் 100 மின் விளக்குகளாக பெட்டியில் அடைத்து அனுப்புகிறது. ஒரு பெட்டியில் 10க்கு மேற்பட்ட மின் விளக்குகள் பழுதுள்ளதாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவை தோராயமாக கணக்கிடுக.

3. பிளேடுகள் உற்பத்தியில் ஒரு பிளேடு பழுதாயிருக்க 1/500 என்ற சிறிய வாய்ப்பிருக்கிறது. அந்த நிறுவனம் பிளேடுகளை 10 எண்ணிக்கை கொண்ட பெட்டிகளில் அடைத்து அனுப்புகிறது. இவ்வாறு அனுப்பப்பட்ட 20,000 பெட்டிகளில் எத்தனை பெட்டிகளில் அ) ஒன்றுமே பழுதாயிராது ஆ) ஒன்று மட்டும் பழுதாயிருக்கும் இ) மூன்று பழுதாயிருக்கும்.

4. ஒரு அலுவலகத்திலுள்ள டெலிபோன் பிரிவு சராசரியாக நிமிடத்திற்கு 3 அழைப்புகள் பெற்று வந்தது. ஒரு நிமிடத்தில் ஒரு

அழைப்புமே வராதிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன? (பாய்ஸான் பரவலைப் பயன்படுத்துக)

5. டெல்லியில் ஒரு தெருவில் போக்குவரத்து விபத்தில் நடப்பதற்கான நிகழ்தகவு ·001 என அனுமானித்து கொண்டு 1000 நாட்களில் டெல்லியில் அ) ஒரு போக்குவரத்து விபத்துக்கூட நிகழாதிருப்பதற்கு ஆ) மூன்றுக்கு மேற்பட்ட விபத்துக்கள் நிகழ்வதற்கு உரிய நிகழ்தகவைக் காண்க. டெல்லியில் இத்தகைய தெருக்கள் 1000 உள்ளன. (டெ. ப. க. 63)

6. அவரை விதைப் பண்ணையாளர் ஒருவர் நீண்டநாள் சோதனைக்கு பின்னர் அவர் வழங்கும் அவரை விதைகளில் 5% விதைகள் முளைப்பதில்லை எனக் கண்டுள்ளார். அவர் 200 விதைகள் கொண்ட பெட்டிகளாக விற்பனை செய்து குறைந்தது 90% விதைகள் ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் முளைக்கும் என உறுதி மொழியளிக்கிறார். ஒரு பெட்டியிலுள்ள விதைகள் அவர் உறுதி மொழியை பொய்யாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க. (I. A. S. 69)

7. X என்ற பாய்ஸான் மாறிக்கு $X = 1$, $X = 2$ என்ற இரு முகடுகள் உள்ளன. $P(X = 5)$ என்ற நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. X என்ற பாய்ஸான் மாறிக்கு $P(X = 1) = P(X = 2)$ என்றுள்ளது. $(X = 4)$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க. (செ. ப. 68)

9. X என்ற பாய்ஸான் மாறிக்கு $P(X = 0) = P(X = 1) = K$ என்றால் K-யின் மதிப்பு $\frac{1}{e}$ என நிரூபி (ப. ப. '70)

10. X-ம், Y-ம் முறையே m_1, m_2 கூட்டுச் சராசரியாக உடைய சார்பற்ற பாய்ஸான் மாறிகளென்றால்,

அ) $X + Y = K$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய

ஆ) $X = Y$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய

நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (டெ. ப. '68)

11. X என்பது λ என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய பாய்ஸான் மாறியென்றால் $E\, x^2 = \lambda\, E\,(X + 1)$ எனக்காட்டுக.

12. கீழ்க்கண்ட விபத்திற்குரிய பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

x	0	1	2	3	4	5
f	142	156	69	27	5	1

13. X என்ற பாய்ஸான் மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 4 என்றால் அதன் மாறுபாடு.

அ) 4 ஆ) 2 இ) 16 ஈ) முன்னவை மூன்றும் அல்ல

14. X-ம், Y-ம், சார்பற்ற பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறிகளாக முறையே 4, 6 என்ற கூட்டுச் சராசரிகளுடையவையானால் X–Y ஒரு

அ) −2ஐ கூட்டுச் சராசரியுடைய பாய்ஸான் மாறி
ஆ) 10ஐ கூட்டுச் ,, ,,
இ) 24ஐ கூட்டுச் ,, ,,
ஈ) பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறியே அல்ல.

15. பூஜ்ஜியத்தை சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட X என்ற பாய்ஸான் வாய்ப்பு மாறிக்கு X = 0 என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு

அ) e^{-1}
ஆ) 1
இ) e
ஈ) $e\frac{1}{1!}$

6. தொடர் நிகழ்தகவுப் பரவல்கள்

(CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

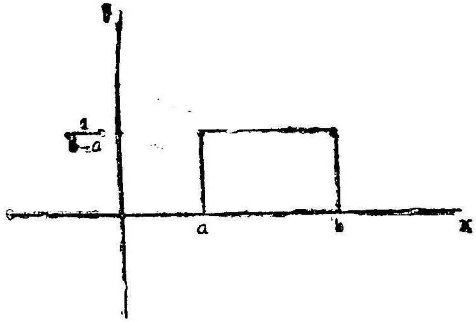
முன்னரே தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளைப் பற்றிய பொதுவான பண்புகளைப் பற்றிப் படித்தோம். இந்த அத்தியாயத்தில் சில முக்கியமான வாய்ப்பு மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவல்களைப் பார்ப்போம்.

செவ்வகப் பரவல் (Rectangular distribution) : இதற்கு சீரான பரவல் (uniform distribution) என்று மற்றொரு பெயரும் உண்டு. X என்ற ஒரு வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$

$$= 0 \qquad \text{இதர இடங்களில்}$$

என வரையப்பட்டால் X-ன் பரவல் செவ்வகப் பரவல் எனப்படுகிறது. இதன் நிகழ்தகவு வளைவரை கீழ்க்கண்டவாறிருக்கும்.



$$EX = \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b + a}{2}$$

$$EX^2 = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\text{Var}\, X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(b - a)^2}{12}$$

$$\text{M. G. F.} = E\, e^{tx}$$

$$= \int_{a}^{b} e^{tx}\, \frac{1}{b - a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{(b-a)t}\, e^{tb} - e^{ta}$$

$$= \frac{(e^{bt} - e^{at})}{t(b-a)}$$

அடுக்குக்குறிப் பரவல் (Exponential distribution) : X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவுச் சார்பு

$$f(x) = \theta\, e^{-\theta x} \qquad x \geq 0$$

$$= 0 \qquad \text{இதர இடங்களில்}$$

என்றிருக்குமானல் X ஒரு அடுக்கு குறிப்பரவல் எனப்படுகிறது.

$$EX = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x\, \theta\, e^{-\theta x}\, dx$$

$$= \theta \int_0^{\infty} x\, \frac{d\, e^{-\theta x}}{-\theta}$$

$$= -\left[x e^{-\theta x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\theta x}\, dx$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{-\theta x}}{-\theta}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\theta}$$

$$EX^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \theta e^{-\theta x}\,dx$$

$$= -\int_0^\infty x^2\, de^{-\theta x}$$

$$= \Big[- x^2 e^{-\theta x}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x}\, 2x\,dx$$

$$= 0 + \int_0^\infty 2x \frac{d}{-\theta} e^{-\theta x}$$

$$= \Big[-\frac{2xe^{-\theta x}}{\theta}\Big]_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{}{\theta} e^{-\theta x}\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\theta}\Big[\frac{}{-\theta} e^{-\theta x}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\theta^2}$$

$$\text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}$$

X-ன் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\text{Var } X}$

$$= \frac{1}{\theta}$$

பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் ஒன்றுதான்

$$\text{M. G. F.} = E\,e^{tx}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \, \theta e^{-\theta x} dx$$

$$= \theta \int_0^{\infty} e^{-(\theta - t)x} dx$$

$$= \theta \left[\frac{e^{-(\theta - t)x}}{-(\theta - t)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\theta}{(\theta - t)}$$

M. G. F. இதிலிருந்து சுலபமாக ஆதியை மையமாகக் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை சுலபமாகக் காணலாம்.

$$\text{M. G. F.} = \frac{\theta}{(\theta - t)}$$

$$= \frac{\theta}{\theta \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{t}{\theta} + \frac{t^2}{\theta} + \dots \frac{t^r}{\theta^r} + \dots$$

$\mu_r = \frac{t^r}{r!}$ -இன் குணகம்

$$= \frac{r!}{\theta^r}$$

$$\therefore \mu'_1 = \frac{1}{\theta}$$

$$\mu'_2 = \frac{2}{\theta^2}$$

$$\mu'_3 = \frac{6}{\theta^3}$$

$$\mu'_4 = \frac{24}{\theta^4}$$

இயல்நிலைப்பரவல் (Normal Distribution) : X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ $-\infty < x < \infty$ என்றிருக்குமானால் X-ன் பரவல் இயல் நிலைப்பரவல் எனப்படும். இது இரு சுட்டுறுப்புகள் m, σ ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. m-ன் மதிப்பு எதிர் அனந்தத்திலிருந்து நேர் அனந்தம் வரை எதுவாகிலும் இருக்கலாம். σ-வின் மதிப்பு நேர்மறையாக பூஜ்ஜியத்திலிந்து நேர் அனந்தத்திற்குட்பட்டிருக்கும்.

இதன் கூட்டுச் சராசரியை நேரடியாகக் காண்பதைவிட E(X − m)ஐக் கணக்கிட்டு அதனின்று EXஐக் கணக்கிடுவது சுலபம்.

$$E(X-m) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\frac{x-m}{\sigma} = u \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

$$\therefore E(X-m) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

u-வின் சார்பு $f(u) = u\, e^{\frac{-u^2}{2}}$ $f(u) = -f(-u)$ என்றிருப்பதால் ஒரு ஒற்றைச் சார்பு (odd function) எனவே தொகைக் கணித முறைப்படி இந்தத் தொகையீட்டின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகிறது.

$$\therefore E(X-m) = 0$$

$$\therefore EX = m$$

X-ன் கூட்டுச் சராசரி m ஆகும்.

இந்தப் பரவலுக்கு நேரடியாக மாறுபாடு காண்பது சுலபம்.

$$\text{Var } X = E(X-m)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x - m}{\sigma}$ எனக் கொள்வோமானால்

$$\text{Var } X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 u^2 e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} \sigma^2 u^2 e^{\frac{-u^2}{2}} du + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 u^2 e^{\frac{-u^2}{2}} du \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_{0}^{\infty} \sigma^2 u^2 e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} u^2 e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$V = \frac{u^2}{2}$ எனக் கொள்வோமானால்

$$dv = u\, du \quad \therefore du = \frac{dv}{u} = \frac{dv}{\sqrt{2v}}$$

$$\therefore \text{Var } X = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} 2v\, e^{-v} \frac{dv}{\sqrt{2v}}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} v^{1/2} e^{-v} dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \, \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \quad \left(\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right)$$

$$\therefore \text{Var } X = \sigma^2$$

இயல் நிலைப் பரவலுக்கு அதன் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் சுட்டுறுப்புக்கள் ஆகும்.

மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : முதலில் ஒற்றைப் படி மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்போம்.

$$= \mu_{2r+1} = E(X-m)^{2r+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2r+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

இந்தத் தொகையை $u = \frac{x-m}{\sigma}$ எனக் கொள்வோமானல் கிடைக்கும் u - வின் சார்பு ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயிருக்கும். தொகையின் எல்லைகள் $(-\infty, \infty)$ என உள்ளதால் தொகைக் கணிதப்படி இந்தத் தொகையின் மதிப்புப் பூச்சியமாகும். எனவே, இயல்நிலைப் பரவலுக்கு எல்லா மைய ஒற்றைப்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் பூச்சியமாகும்.

இரட்டைப்படி மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= \mu_{2r} = E(x-m)^{2r} = \int_{\infty}^{\infty} (x-m)^{2r} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \sigma^{2r} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du \qquad \left(u = \frac{x-m}{\sigma}\right)^2$$

$$= 2\sigma^{2x} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$v = \frac{u^2}{2}$ எனக் கொள்வோமானல்

$$dv = \frac{udu}{u}, \therefore du = \frac{dv}{u} = \frac{dv}{\sqrt{2v}}$$

$$\therefore \mu_{2r} = \frac{2\sigma^{2r}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} (2v)^r e^{-v} \frac{dv}{\sqrt{2v}}$$

$$= \frac{2^{2r}\sigma^{2r}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} v^{r-\frac{1}{2}} e^{-v} dv$$

$$= \frac{2^r \sigma^{2r}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2^r \sigma^{2r}}{\sqrt{\pi}} \left(r - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(r - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2^r \sigma^{2r}}{\sqrt{\pi}} \left(r - \frac{1}{2}\right) \left(r - \frac{3}{2}\right) \ldots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2^r \sigma^{2r} (2r - 1) (2r - 3) \ldots\ldots \frac{1}{2^r}.$$

இரட்டைப்படி மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளுக்கிடையேயுள்ள உறவு :

$$\mu_{2r} = \frac{2^r \sigma^{2r}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)$$

$$\mu_{2r} = \frac{2^{2r-1} \sigma^{2r-2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(r - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\mu_{2r}}{\mu_{2r-2}} = 2.\sigma^2 \frac{\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(r - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2 \sigma^2 \left(r - \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(r - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(r - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sigma^2 (2r - 1)$$

$\therefore \mu_{2r} = \sigma^2 \ (2r - 1)\mu_{2r-2}$ என்பது அவற்றிடையே உள்ள உறவாகும்.

சுட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$E \mid X - X \mid = E \mid X - m \mid$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x-m| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{m} (m-x) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$+\int_{m}^{\infty} (x-m) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x-m}{\sigma}$ எனக் கொள்க.

$\sigma du = dx$

$$\therefore M.D. = \int_{-\infty}^{0} -\sigma u \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du + \int_{0}^{\infty} \sigma u \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$= I_1 + I_2$

I_1-ல் $u = -y$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$$I_1 = \int_{\infty}^{0} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} (-dy)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \sigma y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$= I_2$

$$\therefore M.D. = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \sigma u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma \int_0^\infty u\, e^{-u^2/2} \, du$$

$u^2/2 = v$ எனக் கொள்க.

$$u = \sqrt{2v}$$

$$u\,du = dv$$

$$\therefore \text{M. D.} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma \int_0^\infty e^{-v} \, dv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \left[-e^{-v} \right]_0^\infty$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$$

$$\doteq \frac{4}{5} \sigma$$

இயல்நிலைப் பரவலுக்குக்கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் தோராய மாக $\frac{4}{5}$ × திட்ட விலக்கமாகும்.

முகடு: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$.

f (x) உச்சமாயிருக்கும்போது log f (x)-ம் உச்சமாயிருக்கும். எனவே log f (x) எந்தப் புள்ளியில் உச்சமாயிருக்கிறதோ அதுவே f(x)-ன் முகடாகும்.

$$\log f(x) = \text{நிலையெண்} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$$

$$\frac{d \log f(x)}{dx} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{(x-m)}{\sigma^2} = 0$$

$x = m$ என்ற புள்ளியில் $\frac{d \log f(x)}{dx} = 0$

இந்தப் புள்ளியில் $\frac{d^2 \log f(x)}{dx^2} < 0$ எனச் சுலபமாக நிருபிக்கலாம். ஆகவே $x = m$ என்ற புள்ளி இயல்நிலைப் பரவலின் முகடாகும்.

இடைநிலை: M என்பது பரவலின் இடைநிலையாயிருக்கட்டும். வரையறைப்படி

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}.$$

அதாவது $$\int_{-\infty}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{m}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)} dx = \tfrac{1}{2}$$

,, $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$

I_1 – ஐ மட்டும் தனியே கணிப்போம்.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x-m}{\sigma}$ எனக் கொள்வோமானல்

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$v = u^2/2$ எனக் கொள்க.

$$du = \frac{dv}{u} = \frac{dv}{\sqrt{2v}}$$

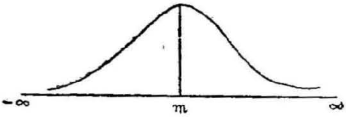
$$\therefore I_1 = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v} \frac{dv}{\sqrt{2v}}$$

$$= \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} e^{-v} dv$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\lceil \frac{1}{2} \right. \left(\because \left\lceil \frac{1}{2} \right. = \sqrt{\pi} \right),$$

எனவே $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$ என்ற உறவிலிருந்து $I_1 = \frac{1}{2}$ என்றிருப்பதால் $I_2 = 0$ என்ருகிறது. ஆகவே இயல்நிலைப் பரவலுக்கு இடைநிலை 'm' ஆகும். இடைநிலை = கூட்டுச் சராசரி = முகடு என்றுள்ளது.

இயல்நிலை வளைவரையின் பண்புகள் : இயல்நிலை வளைவரை கீழ்க்காணும் தோற்றமுடையதாயிருக்கும்.



படம் 5

இதன் வடிவம் மணி வடிவத்தைப் (Bell shaped) போன்றுள்ளது. x = m என்ற கோட்டிற்கு இருபுறமும் சமச் சீராயுள்ளது. எனவே இது ஒரு சமச்சீரான பரவலாகும். ஒற்றைப்படி மையவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பூச்சியமாயுள்ளதாலும், முகடு = கூட்டுச் சராசரி = இடைநிலை என்றுள்ளதாலும் கோட்டக் கெழுக்கள் பூச்சியமாவதிலிருந்து இதை அறியலாம். x-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க y-ன் மதிப்புக் குறைந்துகொண்டேபோய் இருபுற அனந்தங்களில் பூச்சியமாகிறது. எனவே x அச்சு இந்த வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடாக அமைந்துள்ளது. இந்த வளைவரையின் மாற்றப் புள்ளிகள் (Points of Inflexion) $m \pm \sigma$ என்ற புள்ளிகளில் அமைந்துள்ளன.

மைய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு

$$\text{M. G. F.} = M_{\bar{x}}(t) = E e^{t(x-m)}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-m)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x-m}{\sigma}$ எனக் கொள்வோமாஞல்

$$M_{\overline{X}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu\sigma} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2tu\sigma)} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2tu\sigma + t^2\sigma^2 - t^2\sigma^2)} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u - t\sigma)^2 + \frac{t^2\sigma^2}{2}} du$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u - t\sigma)^2} du$$

$$= e^{t^2\sigma^2}$$

($\because$ மீதமுள்ள பகுதி $m = t\sigma$, திட்ட விலக்கம் 1 என உள்ள இயல்நிலை வரையின் பரப்பு ஒன்ருகிறது.)

ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு

$$M(t) = E\,ə$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$u = \frac{x-m}{\sigma}$ எனக் கொள்வோமாஞல்

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma u + m)} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$= \frac{e^{mt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2t\sigma u)} du$$

$$= \frac{e^{mt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u - t\sigma)^2} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} du$$

$$= e^{mt + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u - t\sigma)^2} du\right.$$

$$= e^{mt + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \times 1.$$

பரவலின் குவிவுச் சார்பு

$$K(t) = \log M(t)$$

$$= mt + \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

$\therefore K_1 = \frac{t}{1}$ -ன் குணகம்

$= m$

$K_2 = \frac{t^2}{2!}$ -ன் குணகம்

$= \sigma^2$

$K_r = \frac{t^r}{r!}$ -ன் குணகம்

$= 0 \qquad r \geq 3.$

தேற்றம் : X ஓர் இயல்நிலை மாறியென்றால் lX-ம் ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும். இங்கு l ஒரு மாறிலி அல்லது நிலையெண்.

நிருபணம்: X-ன் கூட்டுச் சராசரி m ஆகவும் திட்ட விலக்கம் σ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$$X\text{-ன் M. G. F. } M_x(t) = e^{mt + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

$$Y = LX\text{-ன் M. G. F.} = E\, e^{ty}$$

$$= E\, e^{tlx}$$

$$= e^{mlt + \frac{t^2 l^2 \sigma}{2}}.$$

இது ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் M. G. F. ஆகும். எனவே Y-ம் ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும். இதன் கூட்டுச் சராசரி l m திட்ட விலக்கம் lσ ஆகும்.

தேற்றம்: X-ம், Y-ம் இரு சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகள். அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியான முறையே m_1, m_2 திட்ட விலக்கங்கள் முறையே σ_1, σ_2 என்றால் $u = l_1X + l_yY$ என்ற வாய்ப்பு மாறியும் ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும்.

நிருபணம்: $M_x(t) = e^{m_1 t + \frac{t^2 \sigma_1^2}{2}}$

$$M_y(t) = e^{m_2 t + \frac{t^2 \sigma_2^2}{2}}$$

முந்திய தேற்றத்தின்படி $Ml_1x(t) = e^{m_{1}\,{}_{1}} + \frac{t^2\, {}_1{}^6\, \sigma_1^2}{2}$

$$M_{l_2y}(t) = e^{l_2 m_2 t + \frac{t^2 l_2 \sigma_2^2}{2}}$$

$$\therefore M_u(t) = e^{(l_1 m_1 + l_2 m_2)t + \frac{t^2}{2}(l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2)}$$

இது ஓர் இயல்நிலை மாறியின் M. G. F. ஆகும். எனவே $u = l_1x + l_2y$-ம் ஓர் இயல்நிலை மாறியாகும். இதன் கூட்டுச் சராசரி $l_1 m_1 + l_2 m_2$ திட்ட விலக்கம். $\sqrt{l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2}$.

மேற்குறித்த தேற்றத்தை n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளுக்கு விரித்துக்கொண்டால் கீழ்க்காணும் தேற்றம் கிடைக்கும்: X_1, X_2, ... X_n என்பன n சார்பற்ற இயல்நிலை மாறி

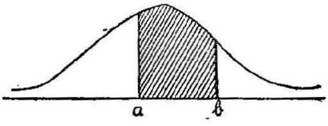
களென்ருல் $l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$ என்ற கூட்டுத் தொகையும் ஓர் இயல்நிலே மாறியாகும். $m_1, m_2, \dots, m_n$ முறையே அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியாகவும் $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ முறையே அவற்றின் திட்ட விலக்கங்களாகவும் இருந்தால் $l_1X_1 + \dots + l_n X_n$ என்ற மாறியின் கூட்டுச் சராசரி $l_1 m_1 + l_2 m_2 + \dots + l_n m_n$ ஆகவும் திட்ட விலக்கம் $\sqrt{l_1^2 \sigma_1^2 + \dots + l_n^2 \sigma_n^2}$ ஆகவும் இருக்கும்.

இயல்நிலே வளைவரையின் பரப்பளவைக் கணக்கிட்டு இயநிலேப் பரவலுக்குரிய நிகழ்தகவுகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. X என்ற இயல்நிலே மாறி a, b என்ற இருநிலேயெண்களுக்கிடையே அமைவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx\,.$$

இதே நிகழ்தகவை இயல்நிலே வளைவரையில் X அச்சுக்கும் வளைவரைக்கும், a, b என்ற புள்ளிகளில் உள்ள குத்துயரங்களுக்குமிடையே உள்ள பரப்பளவாகக் காட்டலாம்.



படம் 6

கோடிட்ட பரப்பு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவாகும். இயல்நிலேப் பரவலின் சுட்டுறுப்புகளேப் பொறுத்து நிகழ்தகவு மாறுதலால் $m = 0$, $\sigma = 1$ என்ற சுட்டுறுப்புகளே உடைய திட்ட இயல்நிலேப் பரவலுக்குரிய பரப்பளவுகள் 0–விலிருந்து 4 வரையுள்ள பலதரப்பட்ட புள்ளிகளுக்குப் பட்டியலாக்கப்பட்டுள்ளது. இது புள்ளியியலில் எல்லாப் புத்தகங்களிலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. திட்ட இயல்நிலே வளைவரையின் மொத்தப் பரப்பான 1 அதன் கூட்டுச் சராசரி பூச்சியத்திற்கு நேராக உள்ள

Y அச்சினால் இருசம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. எனவே,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tfrac{1}{2} = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

பெரும்பாலும் திட்ட இயல்நிலை மாறி Z என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. அல்லது அதன் சுட்டுறுப்புகளால் N (0, 1) எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. மேற்குறித்த சமன்பாட்டைக் கீழ்க் காணுமாறும் எழுதலாம்.

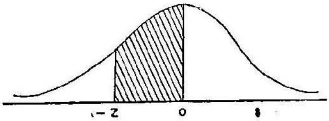
$$\int_{-\infty}^{0} N(0, 1)\, dz = \tfrac{1}{2} = \int_{0}^{\infty} N(0, 1)\, dz.$$

திட்ட இயல்நிலைப் பரவலுக்கான இந்தப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி இப்பரவலுக்கான நிகழ்தகவுக் கணக்குகள் சுலபமாகக் கணக்கிடப்படுகின்றன. திட்ட இயல்நிலைப் பரவல் சமச்சீரான பரவலாதலால் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் உண்மையாக உள்ளன.

$$\int_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-z}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

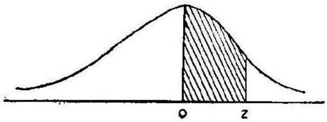
$$I_2 = I_1$$

I_1-க்குரிய படம் :



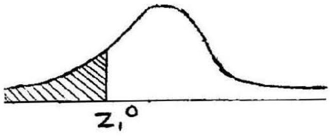
படம் 7

I_2-க்குரிய படம் :



படம் 8

மேற்குறித்த உறவைப் பயன்படுத்தி $Z \leq Z_1$ என்ற நிகழ்ச்சிக் குரிய நிகழ்தகவைக் கீழ்க்காணுமாறு கணக்கிடலாம். கீழ்க் காணும் பரப்பளவு நிகழ்தகவைக் குறிக்கிறது.



படம் 9

Z_1 எதிர்மறை எண். எனவே $-Z_1$ ஒரு நேர்மறை எண் பட்டியல் நேர்மறை எண்களுக்குத்தான் பூச்சியத்திலிருந்து அந்த எண்வரையுள்ள பரப்பைத் தருகிறது.

$-\infty$- யிலிருந்து Z_1 வரையுள்ள பரப்பு = $-\infty$- யிலிருந்து 0 வரை உள்ள பரப்பு $-Z_1$- லிருந்து 0 வரை உள்ள பரப்பு = ·5 — 0 -விலிருந்து $(-Z_1)$ வரை உள்ள பரப்பு (பட்டியலி லிருந்து).

இதேபோன்று Z_1 நேர்மறை எண்ணுயிருந்தால் $Z > Z_1$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு கீழ்க்காணுமாறு கணக்கிடப் படுகிறது.

$$P[Z \geq Z_1] = \int_{z_1}^{\infty} Z(0, 1)\, dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} N(0, 1)\, dz \int_{0}^{z_1} N(0, 1)\, dz$$

$$= \cdot 5 - \int_{0}^{z_1} N(0, 1)\, dz.$$

இரண்டாம் தொகையின் மதிப்பு பட்டியலிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

இதுபோன்று பட்டியலைப் பயன்படுத்தி எந்த இடை வெளிக்குரிய நிகழ்தகவையும் கணக்கிடலாம்.

நிகழத்தக்க பிழை (Probable Error) : பிழைகள் இயல் நிலைப் பரவலின்படி பரவியுள்ளன. அத்தகைய பரவலின் கூட்டுச் சராசரி m என்ருல் λ என்னும் நிகழத்தக்க பிழை பின்

காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு பிழை $(m - \lambda, m+\lambda)$ என்ற இடைவெளிக்கு அமைவதற்கு உள்ள வாய்ப்பும், அந்த இடைவெளிக்கு வெளியே அமைவதற்கு உள்ள வாய்ப்பும் சமமாயிருந்தால் λ நிகழத்தக்க பிழை எனப்படுகிறது. λ-வின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\int_{m-\lambda}^{m+\lambda} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \tfrac{1}{2}$$

அதாவது $\displaystyle\int_{m}^{m+\lambda} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \tfrac{1}{4}$

(பரவல் சமச்சீராயுள்ளதால்)

$Z = \dfrac{x-m}{\sigma}$ என்ற இயல்நிலை மாறியாகக் கொள்வோமானல் தொகை கீழ்க்காணுமாறு.

$$\int_{0}^{\lambda/\sigma} N(0, 1)\, dz = \tfrac{1}{4}$$

திட்ட இயல்நிலைப் பரவலுக்குரிய பரப்பளவிற்கு உரிய பட்டியலில் எந்தப் புள்ளிக்கு நேராகப் பரப்பளவு ·25 என உள்ளது என்று பார்த்தால் $\dfrac{\lambda}{\sigma}$ –வின் மதிப்புத் தெரியும்.

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 0{\cdot}675$$

$$\therefore \lambda = 0{\cdot}675\,\sigma$$

$$= \frac{2}{3}\,\sigma$$

எனவே நிகழத்தக்க திட்டப்பிழை $\frac{2}{3}$ × திட்ட விலக்கம் ஆகும்.

கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation) : Q_1, Q_2, Q_3 என்ற கால்மானங்கள் நிகழ்தகவு வளைவரையை 4 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன. $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ கால்மான விலக்கமாக வரையறுக்கப் படுகிறது. ∞-லிருந்து Q_1 வரை இயல்நிலை வளைவரையின் பரப்பு $\frac{1}{4}$ ஆகும்.

$$\int_{-\infty}^{q_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{q_1 - m} N(0, 1)\, dz = \tfrac{1}{4}$$

$\frac{Q_1 - m}{\sigma}$ –வின் மதிப்பு எதிர்மறையாகும். பரப்பளவுப் பட்டியல் நேர்மறை எண்களுக்குத்தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பரவலின் சமச்சீர்த் தன்மையைப் பயன்படுத்தி,

$$\int_{-\left(\frac{q_1 - m}{\sigma}\right)}^{\infty} N(0, 1)\, dz = \tfrac{1}{2}$$

அல்லது $\int_{0}^{-\left(\frac{q_1 - m}{\sigma}\right)} N(0, 1)\, dz = \int_{0}^{\infty} N(0, 1)\, dx - \int_{-\left(\frac{q_1 - m}{\sigma}\right)}^{\infty} N(0, 1)\, dz$

$$= \cdot 5 - \cdot 25$$
$$= \cdot 25$$

பரப்பளவுப் பட்டியலிலிருந்து $\left(\frac{Q_1 - m}{\sigma}\right) = 0{\cdot}675$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore Q_1 = m - 0{\cdot}675\,\sigma$

இதேபோன்று $Q_2 = m + 0{\cdot}675\sigma$ எனக் காணலாம்.

எனவே கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_2 - Q_1}{2}$

கால்மான விளக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

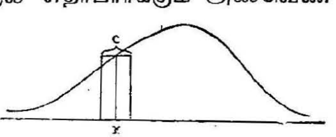
$$= 0{\cdot}675\,\sigma \doteqdot \tfrac{2}{3}\,\sigma.$$

நிகழத்தக்க பிழையின் மதிப்பும், கால்மான விலக்கத்தின் மதிப்பும் ஒன்றுதான்.

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திற்கு இயல்நிலைப் பரவல் பொருந்தும் முறை: இயல்நிலைப் பரவல் இரு சுட்டுறுப்புகள் m_1, σ ஐச் சார்ந்திருப்பதால் முதலில் அவற்றைக் கொடுக்கப் பட்ட விவரங்களிலிருந்து மதிப்பிடவேண்டும்.

$\hat{m} = \overline{x}$, $\hat{\sigma}^2 = s^2$ என்பன அவற்றின் மதிப்பீடுகளாகும். பின்னர்க் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பிரிவுகளுக்குரிய x, s என்ற சுட்டுறுப்புகளை உடைய இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ் தகவுகளைக் கணக்கிட வேண்டும். முதற்பிரிவின் கீழ்எல்லையை $-\infty$ எனவும் கடைசிப் பிரிவின் மேல்எல்லையை ∞ எனவும் எடுத்துக்கொண்டால் சரியாகக் கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளுக் குரிய நிகழ்தகவுகளைக் கணக்கிடலாம். இந்த நிகழ்தகவுகளை அலைவெண்களின் கூட்டுத்தொகை Nஆல் பெருக்கினால் எதிர் பார்க்கும் அலைவெண்கள் கிடைக்கும்.

மற்றொரு முறை: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$ என்ற சார்பின் மதிப்புகள் Z-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குக் கணக்கிடப்பட்டுப் பட்டிய லாக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்திப் பிரிவு களின் நிகழ்தகவைக் கணக்கிடலாம். ஒரு பிரிவின் மையப் புள்ளி x என்றால் அந்த இடத்தில் இயல்நிலை வளைவரையுள்ள குத்துயரம் $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ ஆகும். x ஐ $z = \frac{x-m}{\sigma}$ என்ற மாறியாக மாற்றினால் இந்தக் குத்துயரம் $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$ என ஆகும். இந்தப் பிரிவின் மையக் குத்துயரத்தைப் பிரிவின் இடை வெளியால் பெருக்கினால் பிரிவின் நிகழ்தகவு கிடைக்கிறது. இந்த நிகழ்தகவை Nஆல் பெருக்கினால் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் கள் கிடைக்கும். எனவே முதலில் பிரிவின் மையப் புள்ளியை Zஆக மாற்றி அதற்குரிய $\varphi(z)$ - இன் மதிப்பைப் பட்டியலிலிருந்து



படம் 10

எடுத்து எழுதவேண்டும். இதை $\frac{N.C}{\sigma}$ -வினால் பெருக்கினால் பிரிவின் எதிர்பார்க்கும் அலைவெண் நேரடியாகக் கிடைத்து விடும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலை இரு வழிகளில் பொருத்துக.

மார்க்குகள்:	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
மாணவர்கள்:	3	61	132	153	140	51	2

விடை: பரப்பளவு முறை: முதலில் சுட்டுறுப்புகள் m, σ ஐ மதிப்பிட வேண்டும். $\hat{m} = x \; \hat{\sigma} = s$

பிரிவின் மையம் x	அலைவெண் f	$d = \frac{x-55}{10}$	f d	f d^2
25	3	—3	— 9	27
35	61	—2	— 122	244
45	132	—1	— 132	132
55	153	0	0	0
65	140	1	140	140
75	51	2	102	240
85	2	3	6	18
கூடுதல்	542		—15	801

$$\bar{X} = A = C \frac{\Sigma f d}{N}$$

$$= 55 + 10 \times \frac{(-15)}{542}$$

$$= 55 - 0{\cdot}28$$

$$= 54{\cdot}72$$

$$\therefore \hat{m} = 54{\cdot}72$$

$$s^2 = c^2 \left[\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2 \right]$$

$$= 10^2 \left[\frac{765}{542} - \left(\frac{-15}{542}\right)^2 \right]$$

$$= 10^2 \times 1{\cdot}4107$$

$$s = 10 \sqrt{1{\cdot}4107}$$

$$= 11{\cdot}9$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 11{\cdot}9$$

$\hat{m} = 54{\cdot}72$ $\hat{\sigma} = 11{\cdot}9$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களுடைய இயல் நிலைப் பரவலுக்கு கொடுக்கப்பட்ட பிரிவுகளுக்குரிய நிகழ் தகவைக் கணக்கிட வேண்டும்.

பிரிவின் மையம் x	$z = \frac{x - 54{\cdot}72}{11{\cdot}9}$	φ (z)	$\frac{N \times C}{\sigma}$ φ (z) $= 456 \times \varphi$ (z)
25	— 2·49	·0180	48
35	— 1·65	·1023	47
45	— 0·81	·2874	131
55	0·03	·3988	182
65	0·87	·2732	125
75	1·71	·0925	42
85	2·55	·0158	7
கூடுதல்			541

மற்றொரு முறை

பிரிவின் எல்லைகள் x	$z = \frac{x - 54.72}{11.9}$	$-\infty$ யிலிருந்து Z வரை பரப்பு	பிரிவுகளுக்கான நிகழ்தகவு	எதிர்பார்க்கும் அலையெண்கள்
$-\infty$	$-\infty$	·0000		
30	−2·09	·5000 − ·4817 = ·0183	·0183	542 × ·0183 = 10
40	−1·25	·5000 − ·3944 = ·1056	·0873	542 × ·0873 = 47
50	−0·41	·5000 − ·1554 = ·3446	·2390	542 × ·2390 = 130
60	0·44	·5000 + ·1700 = ·6700	·3254	542 × ·3254 = 176
70	1·29	·5000 + ·4015 = ·9015	·2315	542 × ·2315 = 125
80	2·14	·5000 + ·4838 = ·9838	·0823	542 × ·0823 = 45
∞	∞	·5000 + ·5000 = 1·0000	·0162	542 × ·0162 = 9
கூடுதல்				542

X என்பது 50 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் 5 ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை மாறியென்றால் கீழ்க் கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் காண்க அ) P [X > 54] ஆ) P [X < 51] இ) P 42 < x < 49]

விடை : திட்ட இயல் மாறிக்குத்தான் பட்டியல்கள் உள்ளதால் இவை திட்ட இயல்நிலை மாறிக்குறிய நிகழ்ச்சிகளாக மாற்றப்பட்டு பட்டியலின் மூலம் நிகழ்தகவு கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

அ) $P\,[X > 54] = P\left[\frac{X-50}{5} > \frac{54-50}{5}\right]$

$$= P\,[\,N(0,1) > \cdot 8\,]$$

$$= \int_{\cdot 8}^{\infty} N(0,1)\,dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} N(0,1)\,dz - \int_{0}^{\cdot 8} N(0,1)\,dz$$

$$= \cdot 5 - \cdot 2881$$

$$= \cdot 2119$$

ஆ) $P\,[X < 51] = P\left[\frac{X-50}{5} < \frac{51-50}{5}\right]$

$$= P\,[N(0,1) < \cdot 2\,]$$

$$= \int_{-\infty}^{\cdot 2} N(0,1)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} N(0,1)\,dz + \int_{0}^{\cdot 2} N(0,1)\,dz$$

$$= \cdot 5 + \cdot 0793$$

$$= \cdot 4907$$

இ) $P[42 < X < 49] = P\left[\frac{42-50}{5} < \frac{X-50}{5} < \frac{49-50}{5}\right]$

$$= P[-1{\cdot}6 < N(0,1) < -0{\cdot}2]$$

$$= \int_{-1\cdot6}^{-0\cdot2} N(0,1)\,dz$$

$$= \int_{-1\cdot6}^{0} N(0,1)\,dz - \int_{0-2}^{0} N(0,1)\,dz$$

$$= \int_{0}^{1\cdot6} N(0,1)\,dz - \int_{0}^{0\cdot2} N(0,1)\,dz$$ (இயல் நிலைப் பரவல் சமச் சீரானதால்)

$$= {\cdot}4452 - {\cdot}0793$$

$$= {\cdot}3659$$

3. 1000 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் 55 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் 10ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. இயல்நிலைப் பரவலின் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி அ) எத்தனை மாணவர் 65 மதிப்பெண்களுக்கு அதிகமாகவும் ஆ) எத்தனை மாணவர் 40 மதிப்பெண்களுக்கு குறைவாகவும் எடுத்துள்ளனர் எனக் காண்க.

விடை: முதலில் நிகழ்ச்சிகளுக்குறிய நிகழ்தகவைக் கணக்கிட்டு பின்னர் அதை 1000ஆல் பெருக்கினுல் மாணவரின் எண்ணிக்கை தெரியும்.

(அ) $P[X > 65] = P\left[\frac{X-55}{10} > \frac{65-55}{10}\right]$

$$= P[N(0,1) > 1]$$

$$= \int_{1}^{\infty} N(0,1)\,dz$$

$$= \int_0^{\infty} N(0, 1)\, dz - \int_0^{1} N(0, 1)\, dz$$

$$= \cdot 5 - \cdot 3413$$

$$= \cdot 1587$$

1000 மாணவரில் $1000 \times \cdot 1587 = 158 \cdot 7 = 159$ மாணவர் 65 மதிப்பெண்களுக்கு மேல் வாங்கியிருப்பார்கள்.

(ஆ) $P[X \leq 35] = P\left[\frac{X - 55}{10} \leq \frac{35 - 55}{10}\right]$

$$= P\left[N(0, 1) \leq -2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} N(0, 1)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} N(0, 1)\, dz - \int_{-2}^{0} N(0, 1)\, dz$$

$$= \cdot 5 - \int_0^{2} N(0, 1)\, dz$$

$$= \cdot 5 - \cdot 4772$$

$$= \cdot 0228$$

1000 மாணவரில் $1000 \times \cdot 0228 = 23$ மாணவர்கள் 35க்கும் குறைவாக வாங்கியிருப்பார்கள்.

4. X,Y ஆகியவைகள் சார்பற்ற ஒரே மாதிரியான பரவலைப் பெற்ற ராண்டம் மாதிரிகள் என்க. (X+Y), (X−Y) ஆகியவைகள் சார்பற்ற ராண்டம் மாதிரிகள் என்றால் X, Y ஆகியவைகள் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகின்றன என நிறுவுக.

விடை : X இன் M.G.F. M (t) என்க.

(X+Y, X−Y) இன் M.G.F. $= E\{e^{t_1(x+y)+t_2(x-y)}\}$

$= Ee^{t_1(x+y)} \cdot Ee^{t_2(x-y)}$ (சார்பற்றவை யாதலால்)

$= Ee^{(t_1+t_2)x} \cdot Ee^{(t_1-t_2)y}$

$= M(t_1+t_2) \cdot M(t_1-t_2)$

$M(t_1+t_2) \cdot M(t_1-t_2) = Ee^{t_1x} \cdot Ee^{t_2x} \cdot Ee^{t_1y} \cdot Ee^{-t_2y}$

$= [M(t_1)]^2 \; M(t_2) \; M(-t_2)$

$\Rightarrow \log M(t_1+t_2) + \log M(t_1-t_2) = 2\log M(t_1) + \log M(t_2) + \log M(-t_2)$

இப்போது $\log M(t) = N(t)$ எனக் கொள்வோமானால்

$N(t_1+t_2) + N(t_1-t_2) = 2N(t_1) + N(t_2) + N(-t_2)$

t_2 க்கு ஒருமுறை வகையீடு செய்தால்

$N'(t_1+t_2) - N'(t_1-t_2) = N'(t_2) - N'(-t_2)$ எனப் பெறுகிறோம். மறுமுறை t_2 க்கு வகையீடு செய்தால்

$N''(t_1+t_2) + N''(t_1-t_2) = N''(t_2) + N''(-t_2)$

$t_2 = 0$ எனக் கொண்டால் $N''(t_1) + N''(t_1) = C$

அதாவது $N''(t_1) = K$

ஒரு முறை t_1 க்கு தொகையீடு செய்தால்

$N'(t_1) = Kt_1 + a$

மேலும் ஒரு முறை t_1 க்கு தொகையீடு செய்தால்

$$N(t_1) = K\frac{t_1^2}{2} + at_1 + b$$

அதாவது $\log M(t_1) = At_1^2 + Bt_1 + C$

$$\Rightarrow M(t_1) = e^{At_1^2 + Bt_1 + C}$$

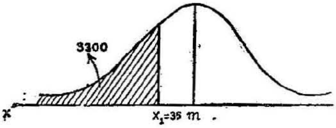
$$= \lambda e^{At_1^2 + Bt_1} \quad (\lambda = e^c)$$

இது இயல்நிலைப் பரவலின் M. G. F. ஆகும். எனவே Xம் Yம் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது.

5. X என்ற இயல்நிலை மாறிக்குரிய நிகழ்தகவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. i) $P[X < 35] = \cdot 3300$ ii) $P[X < 85] = \cdot 9987$. இவற்றிலிருந்து X இன் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க.

விடை: $P[X < 35] = \cdot 3300$

X இன் கூட்டுச் சராசரி m என்றும் திட்ட விலக்கம் σ என்றுமிருக்கட்டும். 35க்கு குறைவாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு ·5ஐ விட குறைவாக இருப்பதால் 'm' இன் மதிப்பு 35 ஐ விட அதிகமாயிருக்கும்



$$Z \quad \frac{x_1 - m}{\sigma} \quad O$$

$$P[x < 35] = \cdot 3300$$

அதாவது $P\left[\frac{x - m}{\sigma} < \frac{35 - m}{\sigma}\right] = \cdot 3300$

,, $P\left[N(0, 1) < \frac{35 - m}{\sigma}\right] = \cdot 3300$

பட்டியலிருந்து $\frac{35 - m}{\sigma}$ வின் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

நேரடியாக பட்டியல் இந்த மதிப்பைக் கொடுக்காது.

$\frac{35 - m}{\sigma}$ வின் மதிப்பு எதிர்மறையாயிருக்கும். அதை $-Z_1$ எனக் குறிப்போம்.

$$\int_{-Z_1}^{0} N(0, 1)\, dz = \cdot 1700$$

$$\therefore \int_{0}^{Z_1} N(0, 1)\, dz = \cdot 1700$$

Z_1 இன் மதிப்பு பட்டியலிலிருந்து 0·44 ஆகக் கிடைக்கிறது.
$\therefore -Z_1 = -0{\cdot}44.$

அதாவது $\dfrac{35-m}{\sigma} = -0{\cdot}44$

அதாவது $m - 0{\cdot}44\,\sigma = 35$ – (1) என்ற m ற்கும் σ விற்கும் இடையே உள்ள உறவு கிடைக்கிறது.

$$P\,[\,x < 85\,] = \cdot 9987$$

$$P\left[\frac{x-m}{\sigma} < \frac{85-m}{\sigma}\right] = \cdot 9987$$

$$P\left[N(0, 1) < \frac{85-m}{\sigma}\right] = \cdot 9987$$

அதாவது $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{85-m}{\sigma}} N(0, 1)\, dz = \cdot 9987$

$$\therefore \int_{0}^{\frac{85-m}{\sigma}} N(0, 1)\, dz = \cdot 4987$$

பட்டியலிலிருந்து $\dfrac{85-m}{\sigma} = 3{\cdot}02$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே $85 = m + 3{\cdot}02\,\sigma$ (2) என்ற இரண்டாவது உறவு கிடைக்கிறது. 1க்கும் 2க்கும் தீர்வு கண்டால் m, σ வின் மதிப்பு கிடைக்கும்.

(2) – (1) $3{\cdot}46\,\sigma = 50$

$$\sigma = \frac{50}{3{\cdot}46} = 14{\cdot}6$$

$$\therefore m = 35 + \cdot 44 \times 14\cdot 6$$

$$= 35 + 6\cdot 42$$

$$= 41\cdot 42$$

5. மண்டை ஓடுகள் நீள அகல குறியீட்டின்படி A, B, C என மூன்று வகையாக பிரிக்கப்படுகின்றன. நீள அகலக் குறியீடு 75க் கீழ் இருந்தால் A என்றும், 75க்கும் 80க்கும் இடைப்பட்டிருந்தால் B என்றும் 80க்கு மேற்பட்டது C என்றும் பிரிக்கப்படுகின்றன. கொடுக்கப்பட்ட மண்டை ஓட்டுத் தொகுதிகளை பிரித்ததில் A 58 சதவீதமும் B 38 சதவீதமும் C 4 சதவீதமும் இருந்தன என்றால் பரவல் இயல் நிலை என அனுமானித்து கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

விடை: X என்பது மண்டை ஓட்டின் நீள - அகல குறியீட்டைக் குறிக்கட்டும். கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தி லிருந்து

i) $P[\ X < 75\ ] = \cdot 58$

ii) $P[\ 75 < X < 80\ ] = \cdot 38$

iii) $P[X > 80\ ] = \cdot 04$ என்று தெரிகிறது.

X இன் கூட்டுச் சராசரி m என்றும் திட்ட விலக்கம் σ என்றுமிருக்கட்டும்.

$$P[\ X < 75\ ] = \cdot 58$$

அதாவது $P\left[\dfrac{X-m}{\sigma} < \dfrac{75-m}{\sigma}\right] = \cdot 58$

$$\int_{-\infty}^{\frac{75-m}{\sigma}} N(0,1)\,dz = \cdot 58$$

$$\int_{0}^{\frac{75-m}{\sigma}} N(0,1)\,dz = \cdot 08$$

பட்டியலிலிருந்து $\frac{75 - m}{\sigma} = \cdot 20$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $m + \cdot 20\ \sigma = 75$ – (1) எனக் கிடைக்கிறது.
கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து

$P [X < 80] = \cdot 96$ என அறிகிறோம் $(i + ii)$

அதாவது $P\left[\frac{X - m}{\sigma} < \frac{80 - m}{\sigma}\right] = \cdot 96$

$$,, \quad \int_{-\infty}^{\frac{80-m}{\sigma}} (0, 1)\ dz = \cdot 96$$

$$,, \quad \int_{0}^{\frac{80-m}{\sigma}} N\ (0, 1)\ dz = \cdot 46$$

பட்டியலிலிருந்து $\frac{80 - m}{\sigma} = 1 \cdot 75$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $m + 1 \cdot 75 = 80$ — (2) எனக் கிடைக்கிறது
(1) (2) ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு கண்டால்
$m = 74 \cdot 4,\ \sigma = 3 \cdot 2$ எனக் கிடைக்கிறது.

6. X ஒரு திட்ட இயல் மாறியாகவும், a ஒரு நிலையெண்ணகவும் n ஒரு இரட்டைப்படை முழு நேர்மறை எண்ணகவும் இருந்தால் $E (x - a)^n = E (x + a)^n$ என நிரூபி

விடை : $(x - a)^n = x^n - {}_nc_1\, x^{n-1} a + \ldots\ldots + (-1)^n a^n$

$(x + a)^n = x^n + {}_nc_1\, x^{n-1} a + \ldots\ldots + (-1)^n a^n$

$$E(x - a)^n = E\,[x^n - {}_nc_1\, x^{n-1} a + {}_nc_2\, a^2 x^{n-2} - \ldots\ldots + (-1)^n a^n]$$
$$= Ex^n - {}_nc_1\, a\, E\, x^{n-1} + {}_nc_2\, a^2\, Ex^{n-2} \ldots\ldots + (-1)^n E\, a^n$$
$$= \mu_n - 0 + {}_nc_2\, a^2\, \mu_{n-2} - 0 + {}_nc_4\, a^4\, \mu_{n-4} - \ldots + (-1)^n a^n$$

$$E\,(x + a)^n = E\,[\,x^n + {}_nc_1\, a\, x^{n-1} + \ldots \qquad + (-1)^n a^n\,]$$
$$= E\, x^n + {}_nc_1\, a\, E\, x^{n-1} + \ldots \qquad + (-1)\, a^n$$
$$= \mu_n + 0 + {}_nc_2\, a^2\, \mu_{n-2} + \ldots \qquad + (-1)^n a^n$$

(x ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியாதலால்
$EX = 0 \therefore Ex^n = \mu^n$, $Ex^{n-1} = Ex^{n-3} = \ldots\ldots 0$)

$$\therefore \quad E(x-a)^n = E(x+a)^n$$

7. A, B என்ற இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை ஒன்ருயுள்ளது. இவற்றில் A என்ற முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் B யின் திட்ட விலக்கத்தைப் போன்று K மடங்கு உள்ளது என்ருல் A யின் மிக அதிகமான அலைவெண் B யின் அதிக அலைவெண்ணைப் போல் $\frac{1}{K}$ மடங்குள்ளது என நிரூபி.

விடை : இரு முழுமைத் தொகுதிகளிலும் மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை N என இருக்கட்டும். A யின் கூட்டுச் சராசரி m_1 என்றும் திட்ட விலக்கம் $K\sigma$ என்றுமிருக்கட்டும். B யின் கூட்டுச்சராசரி m_2 என்றும் திட்ட விலக்கம் σ என்றுமிருக்கட்டும். A யின் மாறியை X என்ற எழுத்தாலும் B யின் மாறியை Y என்ற எழுத்தாலும் குறிப்போம். A யின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{K\sigma}\right)^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

இதன் அலைவெண்கள் குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவுகளை N ஆல் பெருக்கிஞல் கிடைக்கும். மிக அதிகமான அலைவெண் $X = m_1$ என்ற புள்ளியில் (முகட்டில்) கிடைக்கும் அடர்த்திச் சார்பை N ஆல் பெருக்கிஞல் கிடைக்கும். எனவே Aயின் மிக அதிகமான அலைவெண் $N \times \frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi}}$ ஆகும்.

இதே போன்று B யின் அடர்த்திச் சார்பு

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_2}{\sigma}\right)^2}$$

ஆகும். B யின் மிக அதிகமான அலைவெண் $y = m_2$ என்ற புள்ளியில் கிடைக்கும். எனவே Bயின் மிக அதிகமான அலைவெண் $= \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

எனவே A யின் மிக அதிகமான அலைவெண் $\frac{N}{K\sigma\sqrt{2\pi}}$

Bயின் மிக அதிகமான அலைவெண் $\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ வைப்

போன்று $\frac{1}{K}$ மடங்குள்ளது.

8. ஒரு நிறுவனம் ஈயக்கோலிகள் தயாரிக்கின்றது. அது தயாரிக்கும் கோலிகளின் சராசரி விட்டம் 0·5 செ.மீ. ஆகவும் திட்ட விலக்கம் 0·005 செ.மீ ஆகவும் உள்ளது. தொழில்களில் தேவைப்படுவதற்கு விட்டம் 0.482 செ. மீ. இலிருந்து 0·510 செ. மீ. வரை இருக்கலாம். விட்டங்களின் அளவு இயல்நிலைப் பரவல் என அனுமானித்து நிறுவனம் எத்தனை சதவீதம் தேவையில்லாத கோலிகள் உற்பத்தி செய்கிறது எனக் காண்க.

விடை : X என்பது விட்டத்தின் அளவைக் குறிக்கட்டும். X இன் பரவல் m = 0·5, σ = ·005. என்ற சுட்டுறுப்புக் களை உடைய இயல்நிலைப் பரவலாகும். X > ·510, X < ·482 ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$P[X > \cdot 510] = P\left[\frac{X - \cdot 5}{.005} > \frac{\cdot 510 - \cdot 5}{\cdot 005}\right]$$

$$= P\left[N(0, 1) > 2\right]$$

$$= \int_{2}^{\infty} N(0, 1)\, dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} N(0, 1)\, dz - \int_{0}^{2} N(0, 1)\, dz$$

$$= \cdot 5 - \cdot 4772$$

$$= \cdot 0228$$

$$P\left[X < \cdot 482\right] = P\left[\frac{X - \cdot 5}{\cdot 005} < \frac{\cdot 482 - \cdot 5}{\cdot 005}\right]$$

$$P[N(0,1) < -3{\cdot}6]$$

$$= \int_{-\infty}^{-3\cdot6} N(0,1)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} N(0,1)\,dz - \int_{-3\cdot6}^{0} N(0,1)\,dz$$

$$= {\cdot}5 - \int_{0}^{3\cdot6} N(0,1)\,dz$$

$$= {\cdot}5 - {\cdot}5$$
$$= 0$$

எனவே, நிறுவனம் குறியளவிற்கு அதிகமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ள கோலிகளைத் தயாரிப்பதற்கென நிகழ்தகவு ·0228 + 0·0000 = ·0228. அதாவது நிறுவனம் 2·28 சதவீதம் கோலிகளை குறியளவிற்குள் அமையாத வகையில் தயாரிக்கிறது.

ஈருறுப்புப் பரவல் அதன் சுட்டுறுப்பு n மிகப் பெரிதாகும் போது இயல்நிலைப் பரவலாகிறது. இதைப் பின்னர் மற்றொரு அத்தியாயத்தில் நிரூபிப்போம். இப்போது இந்த உண்மையைப் பயன்படுத்தி சில கணக்குகள் செய்யலாம்.

9. ஒரு அறுமுகப்பகடை 600 முறை வீசப்பட்டது. அப்படி வீசியதில் 100 முதல் 150 வரை 6 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

விடை: X என்ற மாறி 6 கிடைக்கும் தடவைகளைக் குறிக்கட்டும். X இன் சரியான பரவல் $n = 600$ $p = 1/6$ என்ற சுட்டுறுப்புக்கள் உடைய ஈருறுப்புப் பரவலாகும். இங்கு n பெரிதாக உள்ளதால் X ஐ ஒரு இயல்நிலை மாறியாகக் கொள்ளலாம். இந்த இயல்நிலை மாறிக்கு

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = 600 \times \frac{1}{6} = 100,$$

$$\text{மாறுபாடு} = 600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 82{\cdot}6.$$

திட்ட விலக்கம் = 9 ஆகும்.

X 100க்கும் 150க்கும் இடையில் அமைவதற்கான நிகழ் தகவை இயல்நிலைப் பரவலைப் பயன்படுத்தி காணலாம்.

$$P\left[100 < X < 150\right] = P\left[\frac{100-100}{9} < \frac{X-100}{9} < \frac{150-100}{9}\right]$$

$$= P[0 < N(0, 1) < 5\cdot5]$$

$$= \int_0^{5\cdot5} N(0, 1)\, dz$$

$$= 0\cdot5000$$

ஈருறுப்புப் பரவலான தொடர்ச்சியற்ற மாறிக்குறிய நிகழ் தகவை இயல்நிலைப் பரவலாகிய தொடர்ச்சியுள்ள மாறியின் நிகழ்தகவாக தோராயமாகக் காண்பதால் முழு எண்ணுலாகிய இடைவெளி (a, b), $(a - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})$ என திருத்தப்பட்டு இந்தப் புதிய இடைவெளிக்குரிய நிகழ்தகவு கணக்கிடப் பட்டால் கிடைக்கும் நிகழ்தகவு சரியான நிகழ்தகவிற்கு மிக நெருங்கியதாயிருக்கும். அதாவது தோராய மதிப்பு முன்னதைக் காட்டிலும் சற்று திருத்தமான மதிப்பாகக் கிடைக்கும். அந்த முறையில் (100, 150) என்ற இடைவெளி (99.5, 150.5) என திருத்தப்பட்டு இந்த இடைவெளிக்குரிய நிகழ்தகவு கணக்கிடப் படவேண்டும்.

$$P[99\cdot5 < X < 150\cdot5] =$$

$$P\left[\frac{99\cdot5-100}{9} < \frac{X-100}{9} < \frac{150\cdot5-100}{9}\right]$$

$$= P[-\cdot055 < N(0, 1) < 5\cdot6]$$

$$= \int_{-0\cdot055}^{5\cdot6} N(0, 1)\, dz$$

$$= \int_{-0\cdot055}^{0} N(0, 1)\, dz + \int_0^{5\cdot6} N(0, 1)\, dz$$

$$= \int_{0}^{0.055} N(0, 1)\, dz + 0.5$$

$$= .0209 + 0.5$$

$$= .5209$$

பயிற்சி

1. z ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறி யென்றால் கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (i) $P[z > 1.2]$
(ii) $P[z > -0.8]$ (iii) $P[z < -1.0]$
(iv) $P[z < 1.0]$ (v) $P[-1.0 < z < -1.8]$
(vi) $P[|z| \leq 1.0]$ (vii) $P[|z| > 1.5]$

2. திட்ட இயல்நிலை மாறியின் பரப்பளவுப் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்ட பரப்பளவுக்குரிய z இன் மதிப்பைக் காண்க: (i) ·0435 (ii) ·7235 (iii) ·3456 (iv) ·5000 (v) ·9432.

3. ஒரு தேர்வில் 600 மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்கள் 40 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் 8 ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலை பரவலாய் அமைந்துள்ளன. தேர்வில் 30 மதிப்பெண்கள் எடுத்தால் வெற்றி பெறுவர் என்றும் 60 மதிப்பெண்கள் எடுத்தால் முதல் வகுப்பில் வெற்றி பெறுவர் என்றுமிருந்தால் தேர்வில் தேறாத மாணவர் எண்ணிக்கையையும், முதல் வகுப்பில் தேறியவர் எண்ணிக்கையையும் கணிக்க.

4. ஒரு நிறுவனம் தயாரித்த மின் விளக்குகள் எரியும் நேரம் கூட்டுச் சராசரி 2000 மணி நேரத்தையும் திட்ட விலக்கம் 200 மணி நேரத்தையும் உடைய இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந்துள்ளது. அந்த நிறுவனம் தயாரித்த மின் விளக்குகளில் எத்தனை சதவீதம் 1700 மணி நேரத்திற்கு குறைவாக எரியும் தன்மையுடையதாயிருக்கும்?

5. $m = 80, \sigma = 17$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில்

எடுக்கப்பட்ட 800 உருவ அளவுடைய கூறு ஒன்றில் எத்தனை மதிப்புகள் அ) 60 க்கு மேற்பட்டும் 110க்கு உட்பட்டும் ஆ) 90க்கு மேற்பட்டு இ) 50க்கு குறைவாக இருக்கும் ?

6. X என்ற இயல்நிலை மாறியின் சுட்டுறுப்புக்கள் $m = 100$, $\sigma = 15$ என உள்ளன. அ) $P[X > X_1] = \cdot 1234$ ஆ) $P[X < X_2] = \cdot 3241$ என்றிருந்தால் X_1, X_2 வின் மதிப்பு களைக் காண்க.

7. ஒரு சிற்றூரில் உள்ள 5000 பேர்களது மாத வருமானப் பரவல் ரூ. 150ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் ரூ. 20ஐ திட்ட விலக்கமாயும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந் துள்ளது. அவ்வூரில் (i) ரூ. 100க்கு குறைவாக மாத வருமானம் உள்ளவர்கள் எண்ணிக்கையையும் ii) ரூ. 250க்கு அதிகமாக வருமானம் உள்ளவர்கள் எண்ணிக்கையையும் iii) ரூ. 150க்கு மேல் ரூ. 250க்கு கீழ் வருமானம் உள்ளவர்கள் எண்ணிக் கையையும் கணக்கிடுக.

8. மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண் கள் இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந்துள்ளது. அவர்களில் 15 சதவீதம் மாணவர் 30 மதிப் பெண்களுக்கு குறைவாயும் 10 சத வீதம் மாணவர் 80 மதிப் பெண்களுக்கு அதிகமாயும் எடுத் துள்ளனர் என்றால் அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

9. 10,000 நபர்களின் உயரங்கள் 65″ ஐ கூட்டுச் சராசரி யாகவும் 3″ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல் நிலைப் பரவலாய் அமைந்துள்ளது. அ) 62″க்கும் 71″க்கும் உட்பட்ட நபர்களையும் (ஆ) கடைப்பட்ட 50 சதவீத நபர் களின் உயரங்களுக்குரிய வீச்சையும் காண்க.

10. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 100. அந்தப் பரவலின் முழுமைத் தொகுதியில் 15 சதவீதம் பொருட்கள் 60 க்கு குறைவாயுள்ளன என்றால் அப்பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

11. ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியில் 10 சதவீதம் பொருட்கள் 37க்கு குறைவாயும் 90 சதவிதம் பொருட்கள் 65க்கு குறைவாயும் உள்ளன என்றால் அம் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணிக்க.

12. 300 நபர்களுடைய உயர அளவுகள் ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்டன. அவ்வாறு அமைக்கப்பட்டதில் 120 ஆவது அளவு 64·50 அங் என்றும் 210 ஆவது அளவு 67·35 அங் என்றும் இருந்தன. உயரங்கள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன என அனுமானித்து 60 ஆவது, 270 ஆவது அளவுகளை மதிப்பிடவும். (டெ. ப '57)

13. ஒரு தேர்வு எழுதிய 1000 மாணவர்கள் மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டனர். முதல் பிரிவில் 50 மாணவரும் இரண்டாம் பிரிவில் 350 மாணவரும் தேறினர். இரண்டாம் பிரிவிற்குரிய மிகக் குறைந்த மதிப்பெண் 50; மிக அதிகமான மதிப்பெண் 60. மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலில் அமைந்துள்ளன என அனுமானித்து பரவலின் கூட்டுச் சராசரி தோராயமாக 48·2 என்றும் திட்ட விலக்கம் தோராயமாக 7·5 என்றும் நிருபி. கீழ்க்கண்ட பட்டியலைப் பயன்படுத்துக.

$\frac{X}{\sigma}$	A பரப்பு
0·2	0·079
0·3	0·118
0·4	0·155
1·5	0·433
1·6	0·445
1·7	0·455

A என்பது பூஜ்ஜியத்திலிருந்து $\frac{X}{\sigma}$ வரை உள்ள திட்ட இயல்நிலை மாறியின் பரப்பு

கான்பூர் '68

14. ஒரு நகர அதிகாரிகள் அந்நகரில் 2000 மின் விளக்குகள் தெருக்களில் பொருத்தினார்கள். அம் மின்விளக்குகளது சாரசரி வாழ்க்கை 1000 எரியும் மணி நேரங்களாகவும் திட்ட விலக்கம் 200 மணி நேரங்களாகவும் உள்ளன.

மின் விளக்குகளது வாழ்க்கை இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந்துள்ளது என அனுமானித்து கீழ்க்கண்ட கேள்விகளுக்கு விடையிறுக்கவும்.

அ) முதல் 700 எரியும் மணி நேரங்களுள் எத்தனை மின் விளக்குகள் மாற்றப்பட வேண்டியிருக்கும்?

ஆ) எவ்வளவு எரியும் மணி நேரங்களுக்குப் பிறகு

i) 10 சதவீத மின் விளக்குகள் எரிந்துபோயிருக்கும்?

ii) 10 சதவீத மின்விளக்குகள் இன்னும் எரிந்து கொண்டிருக்கும்? கீழ்க்கண்ட மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன: F (1·50) = 0·933, F(1·28) = ·900.

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$ (டெ. ப '67)

15. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலுக்கு $P_3 = 56$, $Q_3 = 63$ என்றால் அந்தப் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரியையும், திட்டவிலக்கத்தையும் காண்க.

16. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலுக்குரிய அலைவெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு இருந்தன.

பிரிவு	அலைவெண்
40க்கு கீழ்	30
40க்கு மேல் 50க்கு கீழ்	33
50ம் அதற்கு மேலும்	37

பரவலின் சுட்டுறுப்புக்களைக் கண்டுபிடித்து 50க்கும் 60க்கும் இடைப்பட்ட அலைவெண்களைக் காண்க.

(செ.ப '62)

17. ஒரு கல்லூரியில் தேர்வின் அடிப்படையில் மாணவர் 8 தரங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டனர். அவை முறையே A, A –, B, B –, C, C –, D, D –. மாணவரின் திறமை இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந்துள்ளது என அனுமானித்து அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி B – ஐயும் C ஐயும் பிரிக்கும் எல்லையாக அமைந்துள்ளது என அனுமானித்து, மேலும் ஒவ்வொரு தரத்திற்கு உரிய இடைவெளி 0·85 எனக் கொண்டு 1000 மாணவர்களில் எத்தனை மாணவர் (i) B — தரத்தை (ii) C – தரத்தைச் சேர்ந்தவர்கள் என கணிக்கவும். (செ. ப '60)

18. கூட்டுச் சராசரி 70 அங், திட்டவிலக்கம் 3 அங் என்றுள்ள இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந்த உயரங் களுடைய ஒரு குழுவைச் சேர்ந்த நபர்களுக்கு ஒரு கட்டிடத்தின் நுழை வாயிலில் ஒரு நிலை வைக்கவேண்டி யிருந்தது. அதிகபட்சம் 25 சதவீத நபர்களுக்குத்தான் தலையில் இடிக்கலாம் என்ற உத்தேசத்தில் நிலையை அமைத் தால் அதன் உயரம் எவ்வளவு இருக்கும்? நிலையின் உயரம் 76 அங்குலங்கள் இருந்தால் அந்தக் குழுவைச் சார்ந்த 500 பேர்களில் தோராயமாக எத்தனை பேருடைய தலையில் நிலை இடிக்கும்? (பம். ப '68)

19. இரும்புக் கம்பிகள் 3 அங் விட்டமுள்ளதாக தயாரிக்கப் படுகின்றன. அவை 2·99 அங் முதல் 3·01 அங் வரை இருந்தால் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும். உற்பத்தியில் 5% மேற் குறியளவை தாண்டியதாகவும் 5% கீழ்குறியளவை விட குறைந்திருந்ததாகவும் நிராகரிக்கப்பட்டன. விட்டங்கள் இயல்நிலைப் பரவலாய் அமைந்துள்ளன என அனுமானித்து விட்டங்களின் திட்டவிலக்கத்தை கணிக்கவும். அதிலிருந்து குறியளவும் (2·985, 3·015) என்று மாற்றியமைக்கப்பட்டால் எத்தனை சதவீதம் நிராகரிக்கப்படும் எனக் கணக்கிடவும். (I. SI Dip '68)

20. ஒரு பொருள் இரு தனித் தனியான பாகங்களாக உற்பத்தி செய்யப்பட்டு பின்னர் இணைத்து தயாரிக்கப்பட்டது. முதல் பாகத்தின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் முறையே 3 செ.மீ, 0.4 செ.மீ. இரண்டாம் பாகத்தின் கூட்டுச் சராசரி திட்டவிலக்கம் முறையே 2 செ.மீ, 0.3 செ.மீ. இணைத்து தயாரிக்கப்பட்ட பொருளின் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக் கம் என்ன? 6 செ.மீ மேல் நீளமாக உள்ள பொருள் நிராகரிக்கப்படுமென்றால், அதன் சதவீதத்தைக் கணக்கிடுக. (செ.ப '66)

20. கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக.

பிரிவின்மையம்	10	12	14	16	18	20	22
அலைவெண்	4	8	15	32	20	10	6

21. கீழ்க் காணும் பரவலுக்கு கூட்டுச்சராசரி, திட்டவிலக் கம் கணக்கிட்டு, $\bar{X} \pm \sigma$, $\bar{X} \pm 2\sigma$ என்ற இடைவெளி

யில் அமைந்துள்ள சதவீதங்களை, இயல்நிலைப் பரவலின் சதவீதங்களோடு ஒப்பிடவும்.

பிரிவு	அலைவெண்
100–110	5
110–120	12
120–130	23
130–140	36
140–150	49
150–160	29
160–170	22
170–180	17
180–190	11
190–200	7

22. X என்ற இயல்நிலை மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 50, திட்டவிலக்கம் 5. Y என்ற இயல்நிலை மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 70, திட்டவிலக்கம் 7. Xம் Yம் சார்பற்ற மாறிகள் என்றால்

(i) $Z = 3X + 4Y$ என்ற மாறியின் பரவலை எழுதி $Z > 100$ என்ற நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) $Z = 3x - 4y$ என்ற மாறியின் பரவலை எழுதி $Z < -10$ என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண்க.

23. X, Y, Z என்ற சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 40, 30, 20. அவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் 4, 3, 2. $U = 3X + 4Y - Z$ என்ற மாறியானால் கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் கணிக்கவும் :

(i) $P[U > 200]$

(ii) $P[U < 50]$

(iii) $P[70 < U < 220]$

24. X என்ற இயல்நிலை மாறியின் 40 ஐ மையமாகக் கொண்ட முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை 20, 60 ஐ மையமாகக் கொண்ட இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை 25 என்றால் அதன் முதல் நான்கு மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் கணக்கிடவும்.

25. X ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியென்றால் e^{ax} இன் எதிர் நோக்கலைக் கணக்கிடுக.

26. Xம் Yம் சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளென்றால் $Z = X + Y$, $U = X - Y$ என்ற இரு மாறிகளின்

அ) கூட்டுச் சராசரிகளும் ஒன்றாகும்

ஆ) திட்ட விலக்கங்களும் ஒன்றாகும்

இ) கூட்டுச் சராசரிகள் ஒன்று ஆனால் திட்ட விலக்கங்கள் வேறு

ஈ) கூட்டுச் சராசரிகள், திட்ட விலக்கங்கள் ஒன்றுதான்.

27. X, Y, என்ற சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 30, 40, ஆகவும் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 4, 5 ஆகவும் இருந்தால் $X+Y = Z$ என்ற மாறியின் திட்ட விலக்கம் :

அ) $\sqrt{9}$ ஆ) $\sqrt{21}$ இ) $\sqrt{29}$ ஈ) $\sqrt{41}$

28. X என்ற இயல் நிலை மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 65. $P[X < X_1] = .6342$ என்று இருந்தால் X_1 இன் மதிப்பு

அ) 65 க்கு குறைவாக இருக்கும்.

ஆ) 65 க்கு அதிகமாக இருக்கும்.

இ) நிகழ்தகவை வைத்து X_1 எப்படி இருக்கும் எனக் கூற இயலாது

29. இயல்நிலை மாறிக்கு கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்: கால்மான விலக்கம்: திட்ட விலக்கம் தோராயமாக

அ) 12 : 10 : 18

ஆ) 12 : 10 : 15

இ) 6 : 5 : 8

ஈ) 6 : 4 : 12 என்று இருக்கும்

30. m, σ என்ற சுட்டுறுப்புக்களைக் கொண்ட இயல் நிலை மாறியின் ஆதியை மையமாகக் கொண்ட

M. G. F. :

அ) $e^{mt + \frac{t^2}{2}\sigma^2}$

ஆ) $e^{\frac{t^2}{2}\sigma^2}$

இ) e^{imt}

ஈ) $e^{mt - \frac{t^2}{2}\sigma^2}$

7. மாறிகளின் மாற்றங்கள்

TRANSFORMATION OF VARIABLES

X என்ற ஒரு தொடர் மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f (x) என்று இருக்கட்டும். புதிதாக $Y = \varphi(x)$ என்ற X இன் சார்பு ஒன்றுகிய வாய்ப்பு மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு $= f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$. Y யின் வீச்சு இயற்கை யான முறையில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும். இது போன்று X, Y என்ற இரு வாய்ப்பு மாறிகளின் அடர்த்திச் சார்ப்பு f (x, y) என்றிருக்கட்டும். $u = \varphi\ (x, y)$ $v = \psi\ (x, y)$ புதி தாக வரையப்பட்ட இரு மாறிகளாக இருக்கட்டும். இந்தப் புதிய மாறிகளுக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு கீழ்க் கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$$f(u, v) = f(x, y)\ |J|$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ என வரையப்படுகிறது.

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

எது சுலபமோ அதைக் கணித்து f (x, y) ஐ |J| ஆல் பெருக்கி x, y ஆகிய மாறிகளை u, v ஆகிய மாறிகளுக்கு மாற்றினல் கிடைக்கும் சார்பு u, v ஆகிய மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும். இரு மாறிகளுக்கு கண்டு பிடிப்பதைப் போன்றே 'n' மாறிகளுக்கு அடர்த்திச் சார்பைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

$f(x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட n மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகவும்,

$$y_1 = \varphi_1 (x_1 \ldots\ldots x_n)$$

$$y_2 = \varphi_2 (x_1\ x \ldots x_n)$$

$$y_3 = \varphi_3 (x_1 \ldots\ldots x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$y_n = \varphi_n (x_1 \ldots\ldots x_n)$ என்பன புதிய மாறிகளாயும் இருந்தால் புதிய மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(y_1 \ldots\ldots y_n) = f(x_1 \ldots x_n) \quad |J|$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

குறிப்பு : $x_1\ x_2 \ldots\ x_n$ இலிருந்து $y_1, y_2 \ldots\ y_n$ க்கு செய்யப் படும் மாற்றம் ஆர்த்தாகனலாக (orthogonal) ஆக இருந்தால் J யின் மதிப்பு ± 1 ஆகும். மேலும் இத்தகைய மாற்றத்தால்

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ , \ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \quad \text{ஆக மாறும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு கணக்குகள் :

1. X என்பது ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியென்றால் $ax+b$ யின் பரவல் என்ன ?

விடை : $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/2 \left(\frac{x-o}{}\right)^2} \quad -\infty > x > \infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = ax + b \quad \therefore\ x = \frac{y-b}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = a \quad \therefore J = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore f(y) = f(x) \; |J|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{a} \quad \text{(a நேர்மறை யாதலால்)}$$

$$\therefore f(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2} \qquad -\infty < y < \infty$$

எனவே Yம் ஒரு இயல்நிலை மாறியாகும். Y யின் கூட்டுச் சராசரி b, திட்ட விலக்கம் a.

2. X ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியென்றால் X^2 நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்ன?

விடை : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$

$y = x^2 \qquad x = \pm\sqrt{y}$

$\frac{dy}{dx} = 2x.$ x இன் வீச்சு $(-\infty, \infty)$ எனவே

y இன் வீச்சு $(0, \infty)$ ஆகும்.

$$\therefore f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot |J|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} 2x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-y/2} \sqrt{y} \qquad 0 < y < \infty$$

f (y) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு ஆதலால்

$$\int_0^\infty f(y)\, dy = 1$$ என இருத்தல் அவசியம்.

இங்கு $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y/2} \sqrt{y}\ dy$$ - இல்

y/2 = z எனக் கொள்வோமானால் dy = 2 dz என்றாகும்.

எனவே தொகை $$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z} \frac{Z^{1/2}\ 2\, dz}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z} z^{1/2}\ dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \tfrac{3}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi} = 1$$

$$\int_0^\infty f(y)\, dy = 1$$ என்றுள்ளதால் இது ஒரு நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பாகிறது. இந்தத் தொகையின் மதிப்பு ஒன்றுயிராம் K என்ற நிலையெண்ணுயிருந்தால் அடர்த்திச் சார்பு கிடைத்த f (y) ஐ K ஆல் வகுப்பதால் கிடைக்கிறது.

இனி காமா, பீட்டா பரவல்களைப்பற்றி பார்ப்போம். X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறி

$$(f)\ x = \frac{1}{\Gamma l} e^{-x}\ x^{l-1} \qquad x > 0$$

என்ற நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்புடையதாக இருந்தால் அதன் பரவல் காமா பரவல் எனப்படும். இதன் ஒரே சுட்டுருப்பு l ஆகும். இதனை r (l) எனக் குறிப்பதுண்டு.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் :

$$\mu_r' = Ex^r = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma l} e^{-x} x^{l-1} x^r dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma l} \int_0^\infty e^{-x} x^{l+r-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma l+r}{\Gamma l}$$

$$= \frac{(l+r-1)(l+r-2) \ldots\ldots 1.\Gamma l}{\Gamma l}$$

$$= (l+r-1)(l+r-2) \ldots\ldots 1$$

$$\therefore \mu_1' = l$$

$$\mu_2' = l(l+1)$$

$$\mu_2 = (\mu_2') - (\mu_1')^2$$

$$= l(l+1) - l^2$$

$$= l$$

$$\mu_3' = l(l+1)(l+2)$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2(\mu_1')^3$$

$$= l(l+1)(l+2) - 3(l^2+l)l + 2l^3$$

$$= l^3 + 3l^2 + 2l - 3l^3 - 3l^2 + 2l^3$$

$$= 2l$$

காமா பரவலுக்கு பாய்ஸான் பரவலைப் போன்று $Ex = \mu_2$. இரண்டிற்குமுள்ள வேறுபாடு பாய்ஸான பரவலுக்கு $Ex = \mu_2 = \mu_3$ என்றுள்ளது. ஆனல் காமா பரவலுக்கு $Ex = \mu_2 \pm \mu_3$ என்றுள்ளது.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு :

$$M(t) = E\,e^{tx}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\Gamma l} e^{-x} x^{l-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma l} \int_0^{\infty} e^{-x(1-t)} x^{l-1}\, dx$$

$y = x(1-t)$ எனக் கொள்வோமானுல் $dy = dx\,(1-t)$

$$\therefore dx = \frac{dy}{(1-t)}$$

$$\therefore M(t) = \frac{1}{\Gamma l} \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{1-t}\right)^{l-1} \frac{dy}{(1-t)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma l\,(1-t)^{l}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{l-1}\, dy$$

$$= (1-t)^{-l}$$

தேற்றம் : X என்ற வாய்ப்பு மாறி l என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா பரவலாகவும் Y என்ற வாய்ப்பு மாறி m என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா பரவலாகவும் இருந்தால் X+Y l+m என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமாபரவலாகும்.

நிருபணம் : $M_x(t) = (1-t)^{-l}$

$$M_y(t) = (1-t)^{-m}$$

$$M_{x+y}(t) = (1-t)^{-l} \cdot (1-t)^{-m}$$

$$= (1-t)^{-(l+m)}$$

இது (l+m) என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமாபரவலின் M. G. F ஆகும். தனித் தன்மைத் தேற்றப்படி (Uniqueness theorem) X+Y, (l+m) என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய ஒரு காமா பரவல் ஆகும்.

இதே தேற்றத்தை n திட்டமான சார்பற்ற மாறிகளுக்கு விரித்தால் கீழ்க்கண்ட தேற்றமாகும்.

தேற்றம்: $X_1, X_2 \ldots X_n$ என்பன $l_1, l_2 \ldots l_n$ என்ற சுட்டுறுப்புக் களை உடைய சார்பற்ற மாறிகளென்றால் $X_1+X_2+\ldots X_n$ என்ற மாறி $l_1+l_2+\ldots+l_n$ என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய ஒரு காமா பரவலாகும்.

பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு:

$$F(X) = P(X \leqq x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\Gamma l} e^{-t} t^{l-1} dt$$

இது பூர்த்தியாகாத காமா சார்பு (Incomplete Gamma Distribution) எனப்படுகிறது.

பாயஸான் குவிவுப் பரவல் சார்பிற்கும் பூர்த்தியாகாத காமா சார்பிற்கும் உள்ள தொடர்பு:

பாய்ஸான் குவிவுப் பரவல் சார்பு $F(r) = P[X \leqq r]$

அதாவது $F(r) = e^{-m}\left(1+m+\frac{m^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{m^r}{r!}\right)$

$$= \sum_{s=0}^{r} e^{-m} \cdot \frac{m^s}{s!}$$

$$= \frac{1}{r!} \Sigma e^{-m} \frac{m^s r!}{s!(r-s)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{r-s} dx$$

$$F(r) = \frac{e^{-m}}{r!} \int_0^{\infty} \sum_{s=0}^{r} m^s x^{r-s} {}_rC_s e^{-x} dx$$

$$= \frac{e^{-m}}{r!} \int_0^{\infty} e^{-x} (m+x)^r dx$$

$y = m+x$ எனக் கொள்வோமானல்

$x=0$ என்றிருக்கும் போது $y=m$

$x=\infty$ „ „ $y=\infty$

$dy = dx$

$$\therefore F(r) = \frac{e^{-m}}{r!}\int_{m}^{\infty} e^{-(y-m)}\, y^{r}\, dy$$

$$= \frac{e^{-m} \cdot e^{m}}{r!}\int_{m}^{\infty} e^{-y}\, y^{r}\, dy$$

$$= \frac{1}{r!}\int_{m}^{\infty} e^{-y}\, y^{r}\, dy$$

$$= \frac{1}{r!}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-y}\, y^{r}\, dy - \int_{0}^{m} e^{-y}\, y^{r}\, dy\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{r!}\int_{0}^{m} e^{-y}\, y^{r}\, dy$$

முதல் வகை பீட்டா பரவல் : X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறி $f(x) = \dfrac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}}{B(l, m)} \quad 0 < x < 1$ என்ற அடர்த்திச் சார்புடையதாயிருந்தால் X இன் பரவல் முதல் வகை பீட்டாப் பரவல் எனப்படுகிறது. இதன் சுட்டுறுப்புக்கள் l, m ஆகும். இது $\beta_1 (l, m)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, மாறுபாடு :

$$Ex = \int_{0}^{1} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^l (1-x)^{m-1}}{B(l,m)}$$

$$= \frac{B(l+1, m)}{B(l, m)} = \frac{\Gamma l+1 \quad \Gamma m}{\Gamma l+m+1} \cdot \frac{\Gamma l+m}{\Gamma m \, \Gamma l}$$

$$= \frac{l}{l+m}$$

$$Ex^2 = \int_0^1 x^2 \; f(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{l+1} \; (1-x)^{m-1}}{B(l, m)} \, dx$$

$$= \frac{B(l+2, \; m)}{B(l, m)}$$

$$= \frac{\Gamma l+2 \cdot \Gamma m}{\Gamma l+m+2} \cdot \frac{\Gamma l + m}{\Gamma l \; \Gamma m}$$

$$= \frac{(l+1)\, l}{(l+m)\,(l+m+1)}$$

Var X = மாறுபாடு $= Ex^2 - (Ex)^2$

$$= \frac{(l+1)\, l}{(l+m)\;(l+m+1)} - \frac{l^2}{(l+m)^2}$$

$$= \frac{(l+m)\;(l+1)\; l - l^2\;(l+m+1)}{(l+m)^2\;(l+m+1)}$$

$$= \frac{l\, m}{(l+m)^2\,(l+m+1)}$$

இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவல்: X என்ற தொடர் வாய்ப்பு மாறி $f(x) = \dfrac{x^{l-1}}{B(l, m)\,(1+x)^{l+m-1}}$ $0 < x < \infty$

என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புடையதாயிருந்தால் X இன் பரவல் இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவல் எனப் படுகிறது. இதற்கும் l, m என்ற சுட்டுறுப்புக்கள் உள்ளன. இதன் வீச்சு நேர் மறையில் பூஜ்ஜியத்திலிருந்து அனந்தம் வரை உள்ளது. இது β_2 (l, m) என குறிக்கப்படும்.

$$Ex = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{B(l, m)} \int_0^\infty \frac{x^l\, dx}{(1+x)^{l+m-1}}$$

$$Ex = \frac{B(l+1, m-1)}{B(l, m)}$$

$$= \frac{\Gamma l+1\ \Gamma m-1}{\Gamma l+m} \cdot \frac{\Gamma l+m}{\Gamma l \Gamma m}$$

$$= \frac{l}{m-1}$$ m ஒன்றைவிட பெரிதாயிருக்க வேண்டும்.

$$Ex^2 = \int_0^\infty x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{B(l, m)} \int_0^\infty \frac{x^{l+1}\, dx}{(1+x)^{l+m}}$$

$$= \frac{B(l+2, m-2)}{B(l, m)}$$

$$= \frac{\Gamma l+2 \;\; \Gamma m-2}{\Gamma l+m} \cdot \frac{\Gamma l+m}{\Gamma l \, \Gamma m}$$

$$= \frac{(l+1)\, l}{(m-1)\,(m-2)}$$ m இரண்டைவிட பெரிதாயிருக்க வேண்டும்.

மாறுபாடு $= \text{Var}\, X = E\, X^2 - (E\, X)^2$

$$= \frac{(l+1)\, l}{(m-1)\,(m-2)} - \frac{l^2}{(m-1)^2}$$

$$= \frac{(l+1)\, l\, (m-1) - l^2\, (m-2)}{(m-1)^2\,(m-2)}$$

$$= \frac{l\, [\, lm - l + m - l\, m + 2\, l - 1]}{(m-1)^2\,(m-2)}$$

$$= \frac{l\,(\, l+m-1)}{(m-1)^2\,(m-2)}$$

தேற்றம்: X என்ற மாறியானது l, m என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவல் என்றால் $\frac{1}{X}$ ம் ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகும். இதன் சுட்டுறுப்புக்கள் (m, l) என மாறியிருக்கும்

நிரூபணம்: $f(x) = \frac{1}{B\,(l,\, m)} \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}}$

$y = \frac{1}{x}$ என்று இருக்கட்டும்.

$$x = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{y^2}$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{y^2}$$

$$f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$= \frac{1}{B(l, m)} \frac{x^{l-1}}{(1+x)^{l+m}} \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{1}{B(l, m)} \frac{(1/y)^{l-1}}{(1+1/y)^{l+m}} \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{1}{B(l, m)} \frac{y^{m-1}}{(y+1)^{l+m}} \quad y > 0$$

$\therefore$ y (m, l) என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஒரு வகை பீட்டாப் பரவலாகும்.

தேற்றம் : Xம் Yம் முறையே l, m என்ற சுட்டுறுப்புகளுடைய சார்பற்ற காமா மாறிகளென்றால், $\frac{X}{X+Y}$ என்ற மாறி (l, m) என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய முதல் வகை பீட்டா மாறியாகவும் X+Y என்ற மாறி l+m என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறியாகவும் இருக்கும்.

நிரூபணம் : Xம் Yம் சார்பற்ற மாறிகளாதலால் f (x, y) = $f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$= \frac{1}{\Gamma e} e^{-x} x^{l-1} \frac{1}{\Gamma m} e^{-y} y^{m-1} \quad x>0 \quad y>0$$

$$= \frac{1}{\Gamma l \; \Gamma m} e^{-(x+y)} x^{l-1} y^{m-1}$$

புதிதாக u=x+y (1) என்றும் $V = \frac{x}{x+y}$ என்றும் (2) இருக்கட்டும்

x, y என்ற மாறிகளில் இருந்து u, v என்ற மாறிகளுக்கு மாற்றம் செய்துள்ளோம்.

x = u v (3) என்ற உறவு $V = \frac{x}{x+y}$ இலிருந்து கிடைக்கிறது.

∴ (1) லிருந்து y = u − x

$= u - uv$ (3) ஐ பயன் படுத்தி

$= u(1-v)$ (4)

y எப்போதும் நேர்மறையாயிருக்குமாதலால் V யின் அதிக பட்ச மதிப்பு ஒன்றுகும். (3) இலிருந்து V எப்போதும் நேர்மறை யான மதிப்புகளைத்தான் எடுக்குமென்று தெரிகிறது. எனவே Vயின் குறைந்த பட்ச மதிப்பு பூச்சியமாகும். 1 லிருந்து u நேர் மறையாக அனந்தம் வரை மதிப்பு எடுக்கலாம் எனத் தெரி கிறது. எனவே $0 < v < 1$, $0 < u < \infty$ என்பன u, v என்ற புதிய மாறிகளின் வீச்சாகும்.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix}$$

$$= -uv - u(1-v)$$

$$= -u$$

$$\therefore |J| = u$$

$$\therefore f(u, v) = f(x, y)\ |J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma l\ \Gamma m}\ e^{-(x+y)}\ x^{l-1}\ y^{m-1}\ u$$

$$= \frac{1}{\Gamma l\ \Gamma m}\ e^{-u}\ (uv)^{l-1}\ [u(1-v)]^{m-1}\ u$$

$$f(u, v) = \frac{\Gamma l+m}{\Gamma l\ \Gamma m\ \Gamma l+m} e^{-u}\ u^{l+m-1}\ v^{l-1}(1-v)^{m-1}$$

$$\frac{1}{\Gamma l+m} e^{-u} u^{l+m-1} \frac{1}{B(l, m)} v^{l-1} (l-v)^{m-1} \quad u>0,\ 0<v<1$$

$$= f_1(u) . f_2(v)$$

u, v இன் அடர்த்திச்சார்பு u, v ஆகிய மாறிகளின் விளிம்புச் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையாக இருப்பதால் u, v சார்பற்ற மாறிகளாகும். மேலும் u (l+m) என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறி என்றும் v (l, m) என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய முதல் வகை பீட்டா மாறியென்றும் தெரிகிறது.

தேற்றம் : இரு சார்பற்ற காமா மாறிகளின் விகிதம் ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகும்.

நிரூபணம் : x, l என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறியாகவும் y, m என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறியாகவும் இருக்கட்டும்.

xம் yம் சார்பற்ற மாறிகளாதலால்

$$f(x, y) = f_1(x) . f_2(y)$$

$$= \frac{1}{\Gamma l} e^{-x} x^{l-1} \frac{1}{\Gamma m} e^{-y} y^{m-1} \qquad x>0 \quad y>0$$

$u = x+y$ – (1) $v = x/y$ —(2) என்பன புதிதாக வரையப்பட்ட மாறிகளாயிருக்கட்டும்.

(2) இலிருந்து $x = vy$ எனக் கிடைக்கிறது. இந்த x இன் மதிப்பை (1) இல் பயன்படுத்தினல்

$u=y(v+1)$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore y = \frac{u}{(v+1)} \quad — (3)$$

$$x = vy = \frac{vu}{v+1}$$

u, v ஆகிய இரு மாறிகளும் நேர் மறையில் பூஜ்ஜியத்திலிருந்து அனந்தம் வரை மதிப்புகள் எடுக்கும்.

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}$$

$$= -\frac{(x+y)}{y^2}$$

$$= -\frac{u(v+1)^2}{u^2}$$

$$= -\frac{(v+1)^2}{u}$$

$$\therefore |J| = \frac{u}{(v+1)^2}$$

$$\therefore f(u, v) = \frac{1}{\Gamma l\, \Gamma m} e^{-(x+y)} x^{l-1} y^{m-1} |J|$$

$$= \frac{\Gamma l+m}{\Gamma l\, \Gamma m\, \Gamma l+m} e^{-u} \left(\frac{uv}{v+1}\right)^{l-1} \left(\frac{u}{v+1}\right)^{m-1} \frac{u}{(v+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma l+m} e^{-u} u^{l+m-1} \frac{1}{B(l, m)} \frac{v^{l-1}}{(v+1)^{l+m}} \quad u>0,\ v>0$$

$$= f_1(u) \cdot f_2(v)$$

u ஒரு காமா மாறியாகும். v, (l, m) என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகும்.

தேற்றம் : X ஒரு திட்ட இயல் நிலை மாறியென்றால் $\frac{X^2}{2}$ சுட்டுறுப்பு $\frac{1}{2}$ ஐ உடைய ஒரு காமா மாறியாகும்.

நிருபணம் : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$

$y = x^2/_2$ y இன் வீச்சு: $0 < y < \infty$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-y} y^{-1/2} \qquad 0 < y < \infty$$

f (y) ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாயிருக்க

$\int_0^\infty f(y)\, dy = 1$ என இருக்க வேண்டும். ஆனல்

$\int_0^\infty f(y)\, dy = \frac{1}{2}$ என்றுள்ளது. எனவே f (y) இன்

நிலையெண்ணில் சிறிது மாற்றம் செய்து $\int_0^\infty f(y)\, dy = 1$ என

இருக்குமாறு அமைக்கிறோம்.

$$\therefore f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y} y^{-1/2} \qquad 0 < y < \infty$$

$$= \frac{1}{\Gamma \frac{1}{2}} e^{-y} y^{-1/2}$$

$\therefore$ **y** ஒரு γ **($\frac{1}{2}$)** மாறியாகும்.

முதல் வகை பீட்டா மாறியின் குவிவுப் பரவல் சார்பு

$$F(x) = \frac{\int_0^x t^{l-1} (1-t)^{m-1} dt}{B(l, m)}$$ பூர்த்தியாக

பீட்டா சார்பு எனப்படுகிறது.

ஈருறுப்புப் பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பிற்கும் பூர்த்தியாகாத பீட்டாச் சார்பிற்கும் உள்ள தொடர்பு:

n, p என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலின் குவிவுப் பரவல் சார்பு

$$F(r) = \sum_{s=0}^{r} p(s)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s \; p^s q^{n-s}$$

$$= \sum_{s} \frac{n!}{s!(n-s)!} p^s q^{n-s}$$

$$= \sum \frac{n!}{r!(n-r-1)!} p^s q^{n-s} \frac{r!}{s!(r-s)!} \frac{(n-r-1)!(r-s)!}{(n-s)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r-1)!} q^{n-r} \sum_{s=0}^{n} \int_0^1 {}_rC_s \, p^s q^{r-s} t^{r-s} (1-t)^{n-r-1} dt$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r-1)!} q^{n-r} \int_0^1 (1-t)^{n-r-1} (p+qt)^r dt$$

$t = 1 - \frac{x}{q}$ எனக் கொள்வோமானால்

$$F(r) = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_0^q x^{n-r-1} (1-x)^r dx$$

என்ற பூர்த்தியாகாத பீட்டாச் சார்பாகிறது.

பயிற்சி

1. இரு மாறிகள் X, Y இன் அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right\}}$$

என்ருல் $u = \frac{x}{\sigma_x} - \frac{\rho y}{\sigma_y}$, $V = (1-\rho^2)^{1/2}\frac{y}{\sigma_y}$ என்ற

இரு மாறிகளும் சார்பற்றவை என நிரூபி.

2. Xம் Yம் சார்பற்ற செவ்வகப் பரவல்கள் (− a யி லிருந்து +a வரை வரையறுக்கப்பட்டது) என்ருல் U = X + Y இன் அடர்த்திச் சார்பு

$$f(u) = \frac{2a+u}{4a^2} \qquad -2a \leqq u \leqq 0$$

$$= \frac{2a-u}{4a^2} \qquad 0 \leqq u \leqq 2a$$

எனக் காட்டு.

3. Xம் Yம் சார்பற்ற திட்ட இயல்நிலை மாறிகளென்ருல் X+Y ம் | X − Y | ம் சார்பற்ற மாறிகளா என சோதிக்கவும்.

4. $X_1\, X_2 \ldots X_n$ என்பன முறையே $m_1\; m_2 \;\ldots\; m_n$ என்ற கூட்டுச் சராசரிகளையும் $\sigma_1\; \sigma_2 \;\ldots\; \sigma_n$ என்ற திட்ட விலக்கங்களையும் உடைய சார்பற்ற இயல் நிலை மாறிகளென்ருல்

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m_i}{\sigma}\right)^2$$ என்ற மாறியின் பரவலைக் காண்க.

5. X, Y என்பன இரு சார்பிலா காமா மாறிகளென்ருல் $\frac{X}{X+Y}$ ஒரு முதல் வகை பீட்டா மாறி யென நிறுவு.

6. ஒரு (l, m) சுட்டுறுப்புக்களை உடைய முதல் வகை பீட்டா மாறி, l+m என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறி ஆகிய இரு மாறிகளின் பெருக்குத்தொகை l என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறி யென நிறுவு.

7. X என்ற வாய்ப்பு மாறி 1 என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறிகளென்றால் $\frac{1}{X}$ இன் பரவலைக் காண்க.

8. X, Y என்ற வாய்ப்பு மாறிகளின் கூட்டு அடர்த்திச் சார்பு $f(x, y) = k \qquad -a \leqq x \leqq a, \; -a \leqq y \leqq a$

என்றால் $u = \frac{x+y}{2}, \; v = \frac{y-x}{2}$ என்ற மாறிகளின் கூட்டு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

9. X என்ற காமா மாறியின் கூட்டுச் சராசரி 10 என்றால் அதன் மாறுபாடு அ) 12 (ஆ) 10 (இ) 100 (ஈ) $\sqrt{10}$

10. Xம் Yம் இரு சார்பற்ற காமா மாறிகளென்றால் X + Y ஒரு

அ) காமா மாறி

ஆ) முதல் வகை பீட்டா மாறி

இ) இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறி

ஈ) இயல் நிலை மாறி

11. X என்ற ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < X < 1 \\ 0 & \text{மற்றப்படி} \end{cases}$$

என்றால் $Y = -2 \log X$ என்ற மாறியின் அடர்த்திச் சார்பை காண்க.

12. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$ என்றுள்ள அடர்த்திச் சார்பை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து X_1, X_2 என்ற இரு சார்பற்ற மதிப்புகள் கூறாக எடுக்கப்படுகின்றன. $V = X_1 + X_2$, $V = X_1 - X_2$ ஆகிய மாறிகளுக்கு அடர்த்திச் சார்புகளைக் காண்க.

13. இரு சார்பற்ற திட்ட இயல் நிலை மாறிகளின் விகிதத்திற்கான பரவலைக் காண்க.

14. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{மற்றப்படி} \end{cases}$ என்ற அடர்த்திச் சார்பை உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து X_1, X_2 என்ற இரு சார்பற்ற மதிப்புகள் கூறாக எடுக்கப் படுகின்றன. $U = X_1 + X_2$, $V = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ சார்பற்ற மாறிகள் என நிறுவு.

8. கூறுப் பரவல்கள்

SAMPLING DISTRIBUTIONS

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உருவ அளவுள்ள ஏராளமான கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு கூறுக்கும் உரிய கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டால் அவை ஒன்றுக் கொன்றுமாறுபட்டிருக்கும். கூட்டுச்சராசரி மதிப்புகளுக்கென்று அமைந்த விச்சிற்குள் அவை பரவலாக அமைந்திருக்கும். இதற்குரிய அலைவெண் பரவலை அமைத்தால் அந்த கூட்டுச் சராசரி மதிப்புகள் ஏதேனும் ஒரு பரவலைப் பின்பற்றுவதைக் காணலாம். அத்தகைய பரவல் கூட்டுச் சராசரியின் கூறுப் பரவல் அல்லது மாதிரிப் பரவல் எனப்படுகிறது. கூட்டுச் சராசரிக்கு பதிலாக வேறு ஏதேனும் அளவையைக் கணக் கிட்டிருந்தால் உதாரணமாக கூறின் மாறுபாட்டைக் கணக் கிட்டிருந்தால் அதற்குரிய கூறுப் பரவல் கிடைக்கும். இவ் வாறு எந்த அளவைக்கு கூறுப் பரவல் கணக்கிடப்படுகிறதோ அது புள்ளியியல் அளவை (Statistics) எனப்படுகிறது. அந்தக் கூறுப் பரவலின் திட்டவிலக்கம் புள்ளியியல் அளவையின் திட்டப்பிழை (Standard Error) எனப்படுகிறது.

இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய பரவல்: m ஐ கூட்டுச் சராசரி யாகவும் σ ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n உருவ அளவுள்ள கூறு எடுக்கப்படுகிறது. $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ என்பன கூறில் உள்ள மதிப்புகள்

$$f(x_1\, x_2\, \ldots x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right)^2} \ldots\ldots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n - m}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2}$$

$x_1\ x_2 \ldots x_n$ இலிருந்து $y_1\ y_2 \ldots y_n$ க்கு

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\bar{x} \text{ என்றிருக்கும்படி}$$

ஒரு ஆர்த்தாகனல் மாற்றம் (Orthogonal Transformation) செய்யவும்

$$\therefore\ |J| = 1$$

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i^2$$

கூறின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

மாறுபாடு $s^2 = \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}$

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \bar{x}_1^2 + \ldots + x_n^2$$

$$= \Sigma (x_i - x)^2 + n\bar{x}^2$$

அதாவது $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 + y_1^2$

அதாவது $y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2$

அதாவது கூறின் மாறுபாடு y_1 ஐத் தவிர மீதி மாறிகள் $y_2, y_3 + \ldots y_n$ ஐச் சார்ந்திருக்கின்றன.

$(y_1 - \sqrt{n}m)^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2 = (x_1 - m)^2 + \ldots + (x_n - m)^2$ —(1) என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இடப்பக்கம் $= \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + nm^2 - 2\sqrt{n}\, m y_1$

வலப்பக்கம் $= \Sigma x_i^2 + nm^2 - 2m\, n\,\bar{x}$

$= \Sigma y_i^2 + nm^2 - 2\, m \sqrt{n}\ y_1 \quad (\because\ y_1 \sqrt{n}\,\bar{x})$

$\therefore$ இடப்பக்கம் = வலப்பக்கம்

$$f(y_1\ y_2 \ldots y_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2} |J|$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma (x_i - m)^2}\ 1.$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(y_1 - \sqrt{n}\, m)^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2]}$$

((1) ஐ பயன்படுத்தி எழுதப்பட்டுள்ளது.)

$$f(y_1 \ldots y_n) = f_1(y_1) \ldots f_n(y_n)$$

எனவே $y_1, y_2 \ldots y_n$ சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

$$f_1(y_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1 - \sqrt{n}\, m)^2}$$

$$y_1 = \sqrt{n}\, \bar{x}$$

$$\frac{dy_1}{d\bar{x}} = \sqrt{n}$$

$$\therefore f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{n}\, \bar{x} \; \sqrt{n}\, m)^2} \cdot \sqrt{n}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - m)^2} \qquad -\infty < \bar{X} < \infty$$

எனவே $\bar{x}$ m ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஐ த் திட்ட விலக்கமாகவும் உடைய இயல் நிலை மாறியாகும்

முன்னர் s^2 என்ற கூறு அளவை y_1 ஐச் சாராமல் உள்ளது என நிரூபித்துள்ளோம். $\bar{\ }$ y_1 ஐ மட்டும் சார்ந்துள்ளது. எனவே s^2 ம் $\bar{x}$ ம் சார்பற்றவையாகும்.

கை வர்க்கப் பரவல் (Chi - Square distribution)

$X_1\ X_2 \ldots X_n$ என்பன n சார்பற்ற திட்ட இயல் நிலை மாறிகளென்ருல் (அதாவது திட்ட இயல் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n உருவ அளவுள்ள கூறிலுள்ள மதிப்புகளென்ருல்) $X^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots X_n^2$ என்ற மாறியின் பரவல் n 'கட்டின்மை எண்ணிக்கை' (degrees of Freedom) உடைய கை வர்க்கப் பரவல் எனப் படுகிறது. எத்தனை சார்பற்ற மாறிகளின் வர்க்கங்களைக் கூட்டுகிருேமோ அதைப் பொறுத்து 'கட்டின்மை எண்ணிக்கை' மாறுபடுகிறது.

கை வர்க்கப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு:

முதலில் X ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியென்றால் $\frac{X^2}{2}$ வின் பரவலைப் பார்ப்போம். காமாப் பரவலின் கீழ் $\frac{X^2}{2}$ என்ற மாறி $\frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய காமா மாறி எனப் பார்த்தோம். $\therefore \frac{X_1^2}{2}, \frac{X_2^2}{2} \ldots \frac{X_n^2}{2}$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{2}$ சுட்டுறுப்பை உடைய சார்பற்ற மாறிகளாகும். எனவே $u = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots X_n^2)$ என்ற மாறி காமா பரவலின் கூட்டுப்பண்பு (Additive property) $\frac{n}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புடைய காமா மாறியாகும்.

$\therefore$ u வின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$(u) = \frac{1}{\Gamma \frac{n}{2}} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} \qquad u > 0 \text{ ஆகும்}$$

$u = \frac{x^2}{2}$ என்பது u விற்கும் x^2 க்கும் உள்ள உறவு.

$$\frac{du}{dx^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; f(x)^2 = f(u) \left| \frac{du}{dx^2} \right|$$

$$= \frac{1}{\Gamma \frac{n}{2}} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2} \qquad x^2 < 0$$

$$= \frac{1}{\Gamma \frac{n}{2}} e^{-x^2/2} (x^2/2)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma \frac{n}{2}} e^{-x^2/2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1} \qquad x^2 > 0 \text{ என்பது}$$

கை வர்க்க மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

கூட்டுச் சராசரியும், மாறுபாடும் y என்ற மாறி 'n' கட்டின்மை எண்ணுடைய கை வர்க்க மாறியாக இருக்கட்டும்.

$$E\,y = \int_0^\infty y\, f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\frac{n}{2}} \int_0^\infty y\, e^{-y/2}\, y^{\frac{n}{2}-1}\, dy$$

$$Ey = \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}} e^{-y/2} y^{\frac{n}{2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\;\Gamma\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-z}\,(2z)^{\frac{n}{2}}\, 2dz \qquad \left(\frac{y}{2} = Z\right)$$

$$= \frac{2}{\Gamma\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}+1$$

$$= \frac{2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\frac{n}{2}}{\Gamma\frac{n}{2}}$$

$$= n$$

$$Ey^2 = \int_0^\infty y^2 f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{y/2}\, y^{\frac{n}{2}+1}\, dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\;\Gamma\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-z}(2z)^{\frac{n}{2}+1}\, 2dz \qquad \left(\frac{y}{2} = z\right)$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}+2}}{2^{n/2}\Gamma^{n/2+/2}}\;\Gamma\frac{n}{2}+2$$

$$= \frac{2^2 \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma n/2}{\Gamma n/2}$$

$$= (n+2)\,n$$

மாறுபாடு $= E\,y^2 - (Ey)^2$

$$= (n+2)\,n - n^2$$

$$= 2n$$

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு :

$$M.G.F. = M(t) = E\,e^{ty}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}} e^{-y^2/y}\, y^{\frac{n}{2}-1} e^{ty}\, dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma n/2} \int_0^\infty e^{-y/2(1-2t)} y^{n/2-1} dy$$

$Z = \frac{y}{2}(1-2t)$ எனக் கொள்வோமானல்

$$\frac{dz}{dy} = \frac{(1-2t)}{2}$$

$$\because\ dy = \frac{2\,dz}{(1-2t)}$$

$$\therefore M(t) = \frac{1}{2^{n-2}\Gamma\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-z} \left[\frac{2z}{1-2t}\right]^{\frac{n}{2}-1} \frac{2dz}{(1-2t)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma n/2\,(1-2t)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-z} z^{n/2}\, dz$$

$$= (1-2t)^{-n/2}$$

M(t) ஐ விரித்து எழுதினல் $\frac{t^r}{r!}$ இன் குணகம் μ'_r ஆகும்.

$$M(t) = (1-2t)^{n/2}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}2t + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)2t^2}{2!}$$

$$+ \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+r-1\right)}{r!}\frac{(2t)^r}{r!}\cdots$$

$$\frac{t^r}{r!} \text{ இன் குணகம்} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+r-1\right)2^r$$

கைவர்க்கப் பரவலின் குவிவுச் சார்பு:

$$k(t) = \log M(t)$$

$$= -\frac{n}{2}\log(1-2t)$$

$$= +\frac{n}{2}\left[2t + \frac{(2t)^2}{2} + \cdots + \frac{(2t)^r}{r} + \cdots\right]$$

$$k_r = \frac{t^r}{r!} \text{ இன் குணகம்}$$

$$= n\ 2^{r-1}(r-1)!$$

தேற்றம். Xம் ஒரு m கட்டின்மை எண்ணுடைய கைவர்க்க மாறியாகவும் Y n கட்டின்மை எண்ணுடைய கைவர்க்க மாறியாகவும், இரு மாறிகளும் சார்பற்றவையாகவும் இருந்தால் X+Y (m+n) கட்டின்மை எண்ணுடைய ஒரு கைவர்க்க மாறியாகும்.

நிருபணம்: X m கட்டின்மை எண்ணுடைய கைவர்க்க மாறியாதலால் அதன் M.G.F

$$MX(t) = (1-2t)^{-m/2}$$

இதேபோல் $MY(t) = (1-2t)^{-n/2}$

xம் yம் சார்பற்ற மாறிகளாதலால்

$$M_{x+y}(t) = M_x(t) \cdot M_y(t)$$

$$= (1-2t)^{-\frac{(m+n)}{2}}$$

இது (m+n) கட்டின்மை எண்ணுடைய கைவர்க்க மாறியின் M. G. F. ஆகும். எனவே தனித்தன்மைத் தேற்றத்தினுல் X+Y, (m+n) கட்டின்மை எண்ணுடைய கைவர்க்க மாறியாகும்.

முகடு: X n கட்டின்மை எண்ணுடைய கைவர்க்க மாறியாயிருக்கட்டும்.

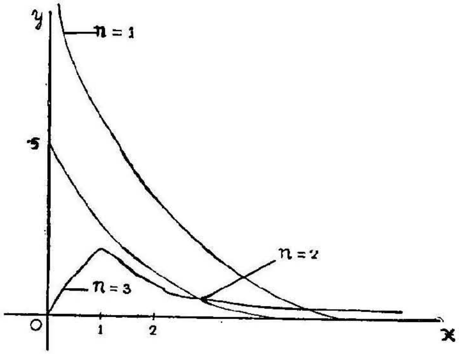
$$\therefore \; f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \; \Gamma\frac{n}{2}} \; e^{-\frac{x}{2}} \; x^{\frac{n}{2}-1}$$

$$f'(x) = K \left[e^{-\frac{x}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}\right) x^{\frac{n}{2}-1} + e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{n}{2}-1\right) x^{\frac{n}{2}-2} \right]$$

$$= K\left[e^{-\frac{x}{2}} \; x^{\frac{n}{2}-2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{n}{2} - 1 \right)\right]$$

$f'(x) = 0$ என்ற மதிப்பை $\frac{x}{2} = \frac{n}{2} - 1$ என்றிருக்கும் போது அடையும். அதாவது $x = n-2$ என்ற புள்ளியில் $f'(x)$ பூஜ்ஜியமாகும். இந்தப் புள்ளியில் $f''(x) < 0$ என சுலபமாக நிரூபித்துவிடலாம்.

எனவே இந்தச் சார்பின் முகடு $n-2$ ஆகும். எனவே கட்டின்மை எண் 2 என்றுள்ள கைவர்க்க மாறியின் முகடு பூஜ்ஜியமாகும். கட்டின்மை எண் 2 க்கு குறைவாயிருந்தால் முகடு எதிர்மறையாகிவிடும் ஆனல் மாறி நேர்மறைக்கு மட்டுமே வரையப்பட்டிருப்பதால் அத்தகைய மாறிகளுக்கு முகடு கிடையாது. $n = 1, 2, 3$ என்ற கட்டின்மை எண்ணுள்ள கைவர்க்க மாறியின் வளை வரைகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.



தேற்றம் இரு சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகளின் விகிதம் இரண்டாம் வகை பீட்டாப் பரவலாகும்.

நிரூபணம்: X என்பது m கட்டின்மை எண்ணுள்ள கைவர்க்க மாறியாகவும் Y என்பது n கட்டின்மை எண்ணுள்ள கைவர்க்க மாறியாகவும் இருக்கட்டும்.

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\frac{m}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{m}{2}-1}\; \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}}\, e^{-y/2}\, y^{\frac{n}{2}-1} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\frac{m}{2}\; 2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\frac{n}{2}}\, e^{\frac{1}{2}(x+y)}\, x^{\frac{m}{2}-1}\, y^{\frac{n}{2}-1}$$

$u = x + y$ – (1) $v = \frac{x}{y}$ –(2) என புதிய மாறிகளை வரையவும்

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{J} = \frac{-x}{y^2} - \frac{1}{y}$$

$$= -\frac{(x+y)}{y^2}$$

(2) இலிருந்து $x = v\,y$–(3) எனக் கிடைக்கிறது. இதை (1) இல் பயன்படுத்தினால் $u = vy + y$

$$= y\,(v+1)$$

$$\therefore \quad y = \frac{u}{v+1} \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இதை (3) இல் பயன்படுத்தினால்

$$x = \frac{u\,v}{v+1} \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

எனவே $f(u,v) = f(x, y) \;|\, J \,|$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\,2^{n/2}} \frac{\Gamma\frac{m+n}{2} \quad e^{-\frac{u}{2}}}{\Gamma\frac{m}{2}\,\Gamma\frac{n}{2}\,\Gamma\frac{m+n}{2}} \left(\frac{uv}{v+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{u}{v+1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{u}{(v+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\,\Gamma\frac{m+n}{2}}\, e^{-u/2}\, u^{\frac{m+n-1}{2}} \;\; \frac{1 \qquad v^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)(v+1)^{\frac{m+n-1}{2}}}$$

எனவே u ஒரு கை வர்க்க மாறியென்றும், v ஒரு $\beta_2 \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ என்றும் தெரிகிறது.

m, σ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப் பட்ட n உருவ அளவுடைய கூறின் மாறுபாட்டுக்குரிய பரவல் : முன்னர் குறிப்பிட்ட கூறின் கூட்டுச் சராசரியும்

மாறுபாடும் சார்பற்ற அளவைகள் எனக் கண்டோம். மேலும் $ns^2 = y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2$ என்றும் பார்த்தோம். இங்கே ஒவ்வொரு y_i ம் பூஜ்ஜியத்தை கூட்டுச் சராசரியாக வும் σ ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலை மாறி கள். எனவே $\frac{y_i}{\sigma}$ ஒரு N (0, 1) ஆகும்.

$$\therefore \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{y_2^2}{\sigma^2} + \frac{y_3^2}{\sigma^2} + \qquad + \frac{y_n^2}{\sigma^2}$$

$$= \left(\frac{y_2}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y_n}{\sigma}\right)^2$$

= (n − 1) சார்பற்ற திட்ட இயல் நிலை மாறிகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

எனவே வரையறைப்படி $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ கட்டின்மை எண் (n − 1) கொண்ட ஒரு வர்க்க மாறியாகும்.

$$u = \frac{ns^2}{\sigma^2} \text{ என்றிருக்கட்டும்}$$

$$f(u) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\frac{n-1}{2}} . e^{-\frac{u}{2}} . u^{\frac{n-1}{2}-1}$$

$$\frac{du}{ds^2} = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$\therefore f(s^2) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\frac{n+1}{2}} \; e^{\frac{-ns^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{ns^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \; \frac{n}{2\sigma}$$

$$= \frac{1 \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\frac{n-1}{2}} \; e^{\frac{-ns^2}{2\sigma^2}} \left(s^2\right)^{\frac{n-1}{2}-1}$$

என்பது கூறின் மாறுபாட்டு நிகழ்தகவும் அடர்த்திச் சார்பாகும்.

தேற்றம் Xம் Yம் சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகள் என்றால் $u = \frac{x}{x+y}$, $v = x + y$ சார்பற்ற மாறிகள் மேலும் u ஒரு முதல் பீட்டா மாறியாகவும் v ஒரு கைவர்க்க மாறியாகவும் இருக்கும்.

நிரூபணம்: Xஇன் கட்டின்மை எண் m என்றும் Yஇன் கட்டின்மை எண் n என்றுமிருக்கட்டும்

$$f(x,y) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\frac{m}{2}} e^{-x/2} x^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\frac{n}{2}} e^{-y/2} \cdot y^{\frac{n}{2}-1}$$

u, v என்ற மாறிகளுக்கு மாற்றம் செய்வோம்

$$u = \frac{x}{x+y} - (1) \qquad v = x+y \; (2)$$

$$\therefore u = \frac{x}{v} \text{ அதாவது } x = uv - (3)$$

$$\therefore y = v(1-u) - (4)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix}$$

$$= v(1-u) + vu$$

$$= v$$

v, 0 விலிருந்து அனந்தம் வரை நேர்மறை மதிப்புகள் எடுக்கும். u, 0 விலிருந்து 1 வரை மதிப்புகள் எடுக்கும்.

$$f(u,v) = f(x,y) \; |J|$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\frac{m}{2} \Gamma\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x+y)} x^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} v$$

$$= \frac{\Gamma\frac{m+n}{2} e^{-v/2} (uv)^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\frac{m+n}{2} \Gamma\frac{m}{2} \Gamma\frac{n}{2}} \left[v(1-u) \right]^{\frac{n}{2}-1} v$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\ \Gamma\frac{m+n}{2}}\ e^{-v/2}\ v^{\frac{m+n}{2}-1} \cdot \frac{1\ u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}$$

$$v > 0$$
$$0 < u < 1$$

$$= f_1\ (v)\ f_2\ (u)$$

எனவே uவும் vவும் சார்பற்ற மாறிகள். u ஒரு முதல் வகை பீட்டா மாறியாகும். v ஒரு கை வர்க்க மாறியாகும்.

ஸ்டூடண்டின் t - பரவல்

STUDENT'S t DISTRIBUTION

W. S காஸெட் (W. S. Gosset) என்பவர் முதன் முதலில் இந்தப் பரவலை ஸ்டூடன்ட் என்ற புனைப்பெயரில் வெளியிட்டதால் அதுவே இப் பரவலுக்கு பெயராக நிலைத்துவிட்டது.

வரையரை : X ஒரு திட்ட இயல் நிலை மாறியாகவும் Y ஒரு n கட்டின்மை எண்ணுடைய கை வர்க்க மாறியாகவும் இருந்து, Xம் Yம் சார்பற்றவைகளாக இருந்தால், $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ என்ற மாறியின் பரவல் n கட்டின்மை எண்ணுள்ள t பரவல் எனப்படும். இது $-\infty$ யிலிருந்து ∞ வரை மதிப்புகள் எடுக்கும்.

பரவலின் அடர்த்திச் சார்பு :

$$t^2 = \frac{X^2}{Y/n}$$

$$\therefore \quad \frac{t^2}{n} = \frac{X^2}{Y}$$

$u = \frac{t^2}{n} = \frac{X^2}{Y}$ என்ற மாறியானது இரு சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளின் விகிதம். எனவே இரு சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளின் விகிதம் பீட்டா மாறி (இரண்டாம் வகை) என்ற தேற்றத்தின்படி u ஒரு $\beta_2\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$

$$\therefore f(u) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{u^{\frac{1}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad u > 0$$

$t^2 = nu$ என்ற உறவை வைத்து

$$f(t^2) = f(u)\left|\frac{du}{dt^2}\right|$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{u^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{(1+u)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{(t^2/n)^{\frac{1}{2}-1}}{(1+t^2/n)^{\frac{n+n}{2}}}\cdot\frac{1}{n} \qquad t^2 > 0$$

$$f(t^2) = \frac{\sqrt{n}}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)t\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+}{2}}n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)t\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\therefore f(t) = f(t^2)\left|\frac{dt^2}{dt}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)t\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,2t \qquad 0 < t < \infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad -\infty < t < \infty$$

$-\infty < t < \infty$ என்ற t யின் வீச்சில் 2 மறைந்துவிடுகிறது. ஏனெனில் $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$ என இருக்க வேண்டியது அடர்த்திச் சார்பின் அவசியமான பண்பாகும்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் : ஒற்றைப்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் :

$$\mu'_{2r+1} = E\,t^{2r+1}$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{t/_2{}^{r+1}}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt$$

தொகைக் குறிக்குள் உள்ள t யின் சார்பு f ( ) = —f(−t) என உள்ளதால் ஒரு ஒற்றைச் சார்பாகும். எனவே தொகைக் கணிதப் பண்பின்படி $\int_{-\infty}^{\infty} t^{2r+1} f(t)\, dt = 0$

$\therefore \mu'_{2r+1} = 0$, r இன் எல்லா நேர்மறை மதிப்புகளுக்கும்

$\therefore \mu'_1 = E\,t =$ கூட்டுச்சராசரி $= 0$, t பரவலின் கூட்டுச் சராசரி பூஜ்யமாகும்.

எனவே ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் மையவிலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் ஒன்றுகின்றன.

$\mu_{2r} = E\,t^{2r}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2r}}{\left(1+t^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{t^{2r}}{\left(1 + t^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt$$

$= y = \frac{t^2}{n}$ எனக் கொள்க

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{n}$$

$$\therefore \mu_{2r} = \frac{2}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} \frac{t^{2r}}{(1+t^2/n)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{n\,dy}{2\,t}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{ny})^{2r-1}}{(1+y)^{\frac{n+1}{2}}}\, dy$$

$$= \frac{n^r}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{y^{r-\frac{1}{2}}}{(1+y)^{\frac{n+1}{2}}}\, dy$$

$$= \frac{n^r}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)}\, B\left(r + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - r\right)$$

$$= \frac{n^r\, \Gamma\frac{n+1}{2}}{\Gamma\frac{1}{2}\;\Gamma n/2} \cdot \frac{\Gamma r+\frac{1}{2}\;\;\Gamma\frac{n}{2}-r}{\Gamma\frac{n+1}{2}}$$

r, $\frac{n}{2}$ ஐ விட குறைவாயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது $2r$, n ஐவிட குறைவாயிருக்க வேண்டும்.

$$= n^r \frac{(r - 1/2)\;(r - 3/2)\;\ldots\;1/2}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - r\right)}$$

$$= n^r \frac{(2r - 1)\;(2r - 3)\;\ldots\;1}{(n - 2)\;(n - 4)\;\ldots\;(n - 2r)}$$

இதன் நிகழ்தகவு வளைவரை சமச் சீரானது. முகடு, இடைநிலை, கூட்டுச் சராசரி ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுதான். எல்லா ஒற்றைப் படி மய்ய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளும் பூஜ்யம். இதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு.

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}\, dt}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ என்ற தொகை ஒருங்காது.

தேற்றம்: கட்டின்மை எண் n மிகப் பெரிதாகி அனந்தத்தை நெருங்கும்போது 't' பரவல் இயல் நிலைப் பரவலாகிறது.

நிரூபணம் :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad -\infty < t < \infty$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{n}{2}}{\Gamma\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{n}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

n! க்கு ஸ்டர்லிங்கின் தோராய மதிப்பை (Stirling's approximation) பயன்படுத்தினுல் $n! \div \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}$ எனக் கிடைக்கும். இந்த உறவைப் பயன்படுத்தினுல்

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi 2}\; e^{-\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\; e^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\therefore \lim B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \lim \frac{\sqrt{2\pi}\; e^{-\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\; e^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{\pi}\; e^{-\left[\frac{n-2+n+1}{2}\right]}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n/2}}$$

$$= \lim \sqrt{\pi}\, \frac{e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2} - \frac{n}{2}} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{1/2} \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \frac{\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-1/2}$$

$$= e^{-1} \cdot 1 = e^{-1}$$

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/2} = e^{-1/2}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, e^{1/2} \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{e^{-1}}{e^{-1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

$$\lim \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \lim \left[\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{n}\right]^{1/2} \lim \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{1/2}$$

$$= e^{t^2/2}\ 1.$$

எனவே $$\lim_{n \to \infty} f(t) = \frac{\lim 1}{\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \frac{1 \sqrt{n}}{\sqrt{n}\, \sqrt{2\pi}\, e^{t^2/2}}$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad -\infty < t < \infty$$

இது ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியின் அடர்த்திச் சார் பாகும். எனவே t_n இயல்நிலை மாறிக்கு ஒருங்குகிறது.

t பரவல் கீழ்கண்டவாறும் வரையறுக்கப்படுகிறது x_1, x_2, x_n என்பன $N(m_1, \sigma^2)$ முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்ட சமவாய்ப்புக் கூறு என்றால் (n – 1) கட்டின்மை

எண்ணுள்ள t மாறி.

$$t = \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\bar{x}$ இங்கு கூறின் கூட்டுச் சராசரியையும் S முழுமைத் தொகுதி யின் திட்டவிலக்கத்திற்குரிய பிழற்சியற்ற மதிப்பீடு

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$ ஐயும் குறிக்கிறது.

$\bar{x}$ இன் பரவல் $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ஆகும்

எனவே $u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ ஒரு N (0, 1) ஆகும்

$\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\sigma 2}$ ஒரு x^2_{n-1} எனத் தெரியும்

$$v = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)\sigma 2}} = \sqrt{\frac{x_{n-1}^2}{n-1}}$$

பொது வரையறைப்படி $\frac{u}{v}$ ஒரு t_{n-1} ஆகும்

$$\frac{u}{v} = \frac{\dfrac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)\sigma^2}}}$$

$$= \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}}$$

$$= \frac{(\bar{x} - m)}{S/\sqrt{n}}$$ எனக் கிடைக்கிறது

எனவே $\frac{(\bar{x} - m)}{S\sqrt{n}}$ ஒரு t_{n-1} ஆகும்

ஸ்நெடிகாரின் F பரவல் (Snedecor's F distribution):

வரையறை: Xம் Yம் சார்பற்ற கை வர்க்க மாறிகளாக முறையே கட்டின்மை எண்களாக m ஐயும் n ஐயும்

கொண்டிருந்தால் $F = \frac{X/m}{Y/n}$ என்ற மாறியின் பரவல் (m,n) என்ற கட்டின்மை எண்களுடைய F பரவல் எனப்படுகிறது. F இன் வீச்சு 0 விலிருந்து அனந்தம் வரை நேர்மறை மதிப்புகளாகும்.

F மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு :

$$F = \frac{X}{Y} \quad \frac{n}{m}$$

$$\therefore \; u = \frac{m}{n} F = \frac{X}{Y}$$ என்ற இரு சார்பற்ற கைவர்க்க மாறிகளின் விகிதமாகும். இரு கைவர்க்க மாறிகளின் விகிதம் ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டாமாறி என்ற தேற்றத்தின்படி u ஒரு இரண்டாம் வகை பீட்டா மாறியாகும்.

எனவே $$f(u) = \frac{1}{B\left[\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right]} \frac{u^{\frac{m-1}{2}}}{(1+u)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad 0 < u < \infty$$

$$\therefore f(F) = f(u) \left|\frac{du}{df}\right|$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{u^{\frac{m-1}{2}}}{(1+u)^{\frac{m+n}{2}}} \frac{m}{n}$$

$$= \frac{m/n}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{u^{\frac{m-1}{2}}}{(1+u)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{m/n}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{\left(\frac{m}{n} F\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\left(1 + \frac{m}{n} F\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} F^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{n}, \frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad 0 < F < \infty$$

இதையே $f(F) = \frac{m^{m/2}\, n^{n/2}\, F^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)(n+mF)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad 0 < F < \infty$

எனவும் எழுதலாம்.

F மாறி பிறிதொரு முறையிலும் வரையறுக்கப்படுகிறது. S_1^2 என்பது இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் பிழற்சியற்ற மதிப்பீடாகவும் (m உருவ அளவுள்ள கூறு) S_2^2 என்பது அதே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n உருவ அளவுள்ள கூறின் அடிப்படையில் கிடைத்த பிழற்சியற்ற மதிப்பீடாகவும் இருந்தால் $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ஒரு $F_{m, n}$ மாறியாக வரையறுக்கப்படுகிறது.

இது எவ்வாறு பொது வரையறையுடன் பொருந்துகிறது எனப் பார்ப்போம். $S_1^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{m-1}$

$$\therefore \frac{S_1^2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{(m-1)\,\sigma^2} \quad (\sigma^2 \text{ முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாடு})$$

$$= \frac{\chi_{m-1}^2}{m-1}$$

இதே போன்று $\frac{S_2^2}{\sigma^2} = \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}$

$$\therefore = \frac{S_1^2 / \sigma^2}{S_2^2 / \sigma^2} = \frac{\chi_{m-1}^2 / m-1}{\chi_{n-1}^2 / n-1} = F_{m-1, n-1} \quad \text{(வரையறைப்படி)}$$

தேற்றம் : F ஒரு $F_{m, n}$ மாறியென்றால் $\frac{1}{F}$ ஒரு $F_{n, m}$ மாறியாகும்.

நிருபணம்: $f(F) = \frac{m^{m/2}\, n^{n/2}\, F^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)(n\ \ mF)^{\frac{m+n}{2}}}$

$$y = \frac{1}{F} \text{ என்றிருக்கட்டும்}$$

$$\frac{dy}{dF} = \frac{-1}{F^2}$$

$$\therefore \left|\frac{dF}{dy}\right| = F^2$$

$$\therefore f(y) = f(F)\left|\frac{dF}{dy}\right|$$

$$= \frac{m^{m/2}\, n^{n/2}\, F^{\frac{m-1}{2}}\, F^2}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(n+mF\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{m^{m/2}\, n^{n/2}\,(1/y)^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(n + m\frac{1}{y}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{m^{m/2}\, n^{n/2}\, y^{\frac{n-1}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(ny+m\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$= F_{n,m}$ இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு.

ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் :

$$\mu_r^1 = E\,F^r$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{F^{\frac{m}{2}-1}\, F^r}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}}\, dF$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{F^{\frac{m}{2}+r-1}}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}}\, dF$$

$\frac{m}{n} F = y$ எனக் கொள்க

$$dF = \frac{n}{m}\, dy$$

$$\therefore \mu'_r = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{ny}{m}\right)^{\frac{m}{2}+r-1} \frac{n}{m} dy}{(1+y)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}+r}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{m}{2}+r-1}\, dy}{(1+y)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^r B\left(\frac{m}{2}+r, \frac{n}{2}-r\right)}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^r \Gamma\left(\frac{m}{2}+r\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right) \Gamma\frac{m+n}{2}}{\Gamma\frac{m+n}{2}\, \Gamma\frac{m}{2}\, \Gamma\frac{n}{2}}$$ (r, $\frac{n}{2}$ ஐ விட குறைவாயிருக்க வேண்டும்.)

$$= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^r \left(\frac{m}{2}+r-1\right)\left(\frac{m}{2}+r-2\right)\cdots\frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-r\right)}$$

F பரவலின் முகடு :

$$f(F) = C \cdot \frac{F^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$\log f(F) = \log C + \left(\frac{m}{2}-1\right)\log F - \left(\frac{m+n}{2}\right)\log\left(1+\frac{m}{n}F\right)$$

$$\frac{d \log f}{dF} = 0 + \left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{1}{F} - \frac{(m+n)}{2}\, \frac{m/n}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)}$$

$$= \frac{m-2}{2F} - \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{(n+mF)}$$

$=0$ என்ருல்

$$\frac{m-2}{2\,F} = \frac{(m+n)\,m}{2\,(n+mF)}$$

$$F = \frac{(m-2)\,n}{m\,(n+2)}$$

எனவே இந்தப் புள்ளியில் $\frac{d \log f(F)}{d F}$ பூஜ்யமாயுள்ளது.

இதே புள்ளியில் $\frac{d^2 \log f(F)}{d F^2} < 0$ என சுலபமாகத் தெரிந்து கொள்ளலாம். எனவே F பரவலின் முகடு f (F) உச்ச மதிப்பை எடுக்கும் $F = \frac{(m-2)\,n}{m\,(n+2)}$ என்ற புள்ளியாகும்.

$\because F > 0$ என்றிருப்பதால் பரவலுக்கு முகடு இருப்பதற்கு $m > 2$ என்றிருக்க வேண்டும். மேலும் முகடு $= \frac{n}{n+2} \cdot \frac{m-2}{m}$ என்றிருப்பதால் இருபின்னங்களின் பெருக்குத் தொகையாகி எப்போதும் ஒன்றுக்கு குறைவாகவே இருக்கும்.

பரவலின் கூட்டுச்சராசரி, மாறுபாடு :

$$\overline{X} = EX = \mu'_1 = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)' \frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)}$$

$$\frac{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{2}}{(n-2)/2}$$

$$= \frac{n}{n-2}$$

$$EX^2 = \mu'_2 = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{m}{2} + 1\right)\left(\frac{m}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right)}$$

$$= \frac{\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{m+2}{2}\right)\frac{m}{2}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)}$$

$$= \frac{n^2\ (m+2)}{m\ (n-2)\ (n-4)}$$

மாறுபாடு $= EX^2 - (EX)^2$

$$= \frac{n^2\ (m+2)}{m\ (n-2)\ (n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2}$$

$$= \frac{n^2}{(n-2)}\left(\frac{m+2}{m\ (n-4)} - \frac{1}{(n-2)}\right)$$

$$= \frac{n^2}{n-2}\left(\frac{mn-4-2m+2n-mn+4}{m\ (n-4)\ (n-2)}\right)$$

$$= \frac{n^2}{(n-2)}\left[\frac{2\ (n-m)}{m\ (n-4)\ (n-2)}\right]$$

தேற்றம்: n அனந்தத்தை நோக்கி பெரிதாகும்போது $F_{m,\, n}$ ஒரு x^2 மாறியாக மாறுகிறது.

நிரூபணம்: $f\ (F) = C\ \dfrac{F^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}}$

n அனந்தத்தை நெருங்கும்போது (As $n \to \infty$)

$$\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m}{2}} . \left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{n}{2}} \to 1\ .\ e^{\frac{m\,F}{2}}$$

$$\therefore f\ (F) \to C'\ \frac{F^{\frac{m}{2}-1}}{e^{\frac{m\,F}{2}}}$$

$m\ F = x^2$ எனக் கொள்வோமானல்

$$f(F) \rightarrow C' \frac{(x^2/m)^{\frac{m}{2}-1}}{e^{x^2/2}}$$

$$= C'' e^{-x^2/2} \cdot (x^2)^{\frac{m}{2}-1} \qquad x^2 > 0$$

C'' என்ற நிலையெண்ணை $\int_0^{\infty} C'' e^{-x^2/2} (x^2)^{\frac{m}{2}-1} = 1$

என இருக்குமாறு கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

எனவே $C'' = \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\frac{m}{2}}$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே $F_{m, n} \rightarrow x^2$ (n பெரிதாகும்போது.)

பிஃஷரின் Z பரவல் (Fisher's Z distribution):

இது F பரவலிலிருந்து கிடைக்கிறது. $F = e^{2z}$ என்ற மாற்றம் செய்தால் F பரவலிலிருந்து Z பரவல் கிடைக்கிறது. Z இன் வீச்சு எதிர் அனந்தத்திலிருந்து நேர் அனந்தம் ($-\infty$ to ∞)

$$f(F) = \frac{m^{m/2} \; n^{n/2} \; F^{\frac{m}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(n+mF\right)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad 0 < F < \infty$$

$$F = e^{2z}$$

$$\frac{dF}{dz} = 2e^{2z}$$

$$\therefore f(Z) = \frac{m^{\frac{m}{2}} \; n^{\frac{n}{2}} \; F^{\frac{m-1}{2}} \; 2e^{2z}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(n+mF\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{2m^{m/2}\ n^{n/2}\ \left(e^{2z}\right)^{\frac{m}{2}-1}\ e^{2z}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(n+m\,e^{2z}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$= \frac{2m^{m/2}\ n^{n/2}\ e^{mz}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)\left(n+me^{2z}\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$

பயிற்சி

1. 40ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் 3ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 25 உருவ அளவுள்ள ஒரு கூறு ஒன்று எடுக்கப்பட்டது. கூறின் கூட்டுச் சராசரி

(அ) 42க்கு அதிகமாக இருப்பதற்குரிய
(ஆ) 36க்கு குறைவாக இருப்பதற்குரிய
(இ) 36க்கும் 42க்கும் இடைப்பட்டு இருப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு என்ன?

2. $X_1 X_2 \ldots X_n$, ஒரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லா மதிப்புகள். இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி m என்றும் திட்டவிலக்கம் σ என்றும் இருந்தால் $U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - m\right)^2}{\sigma 2}$ என்ற மாறியின் பரவலைக் காண்க.

3. Xம், Yம் சார்பில்லா கை வர்க்கமாறிகள் என்றால் $\frac{X}{X+Y}$ என்ற மாறியின் பரவலைக் காண்க.

4. t^2க்கும் Fக்கும் உள்ள உறவு என்ன?

5. 5ஐக் கட்டின்மை எண்ணுகை உடைய ஒரு கை வர்க்கப் பரவலின் மாறுபாடு
(அ) 5 (ஆ) 10 (இ) 15 (ஈ) 20

6. 'n' கட்டின்மை எண்ணுகை உடைய ஒரு t பரவலின் வர்க்கம்.

(அ) ஒரு $F_{1, n}$ ஆகும்
(ஆ) ஒரு X^2_n ஆகும்
(இ) ஒரு திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.
(ஈ) மேற்குறித்த மூன்றும் உண்மையல்ல

7. $F_{6, 10}$ என்ற பரவலின் முகடு :

(அ) ஒன்றுக்கு அதிகமாக இருக்கும்
(ஆ) ஒன்றுக்கு குறைவாக இருக்கும்
(இ) ஒன்றுக்கு குறைவாயும் இருக்கலாம் அல்லது அதிகமாயும் இருக்கலாம்

8. ஒன்றை கட்டின்மை எண்ணுகக் கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப் பரவலின் முகடு :

(அ) ஒன்றுக்கு அதிகமாக இருக்கும்.
(ஆ) ஒன்றுக்கு குறைவாக இருக்கும்.
(இ) ஒன்றுக்கு குறைவாக அல்லது அதிகமாக இருக்கும்.
(ஈ) பரவலின் வீச்சிற்குள் அமையவில்லை.

9. $P\left[X^2_{2r+2} > K\right] = \frac{1}{r!}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-y} y^r\, dy.\ X^{\lambda} = \frac{K}{2}$ என நிறுவுக.

10. இரண்டை கட்டின்மை எண்ணுகக் கொண்ட ஒரு கைவர்க்கப் பரவலுக்கு K என்ற நிலையெண்ணை விட அதிகமான மதிப்புகள் எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $P = e^{\frac{-k}{2}}$ என நிறுவி அதனின்று $K = 2 \log e\left(\frac{1}{p}\right)$ என நிறுவுக.

11. $df = dx, 0 \leq x \leq 1$ என்ற பரவல் சார்பை உடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $x_1, x_2 \ldots x_n$ என்ற சார்பற்ற மதிப்புகள் கூறுக எடுக்கப்பட்டன. $U = x_1, x_2\ x_3 \ldots x_n$ என்றுல் $-2 \log U$ ஒரு கைவர்க்கப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது என நிறுவுக.

12. m என்ற சுட்டுறுப்பை உடைய ஒரு பாய்ஸான் பரவலுக்கு $F(r) = P(X \leq r) = \frac{1}{r!}\int_{m}^{\infty} e^{-y} y^r\, dr$

$$= P\left[X^2_{2r+2} > 2m\right]$$ என நிறுவுக.

9. இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவல்

(BIVARIATE NORMAL DISTRIBUTION)

X, Y என்ற இரு தொடர் வாய்ப்பு மாறிகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$-\infty < x, y < \infty$$

என்றிருக்குமானால் X, Y இன் பரவல் இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவல் எனப் படுகிறது. இதன் சுட்டுறுப்புக்கள் $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$, ρ என்ற ஐந்தாகும். இவற்றில் m_1, m_2 எதிர் அனந்தம் முதல் நேர் அனந்தம் வரை எந்த மதிப்புகள் வேண்டுமானாலும் எடுக்கும். σ_1, σ_2 நேர்மறையில் 0 முதல் அனந்தம் வரை எந்த மதிப்பை வேண்டுமானாலும் எடுக்கும். ρ -1 முதல் $+1$ வரையிலான இடைவெளிக்குள் அமையும். இது இரு மாறிகள் உள்ள சார்பாதலால்

$\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ ஒரு முப்பரிமாண உருவத்தைக் குறிக்கிறது. எனவே $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy = 1$ அதாவது முப்பரிமாணத்தின் அடர்த்தி ஒரு அலகாகும்.

$$P\left[a<X<b,\ c<Y<d\right] = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ என்பதன் நிரூபணம் :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)\right]} dx\, dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}}\, e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2\rho\, uv+v^2\right]}\, du\, dv$$

$$\left(u=\frac{x-m_1}{\sigma_1} \quad v=\frac{y-m_2}{\sigma_2} \right)$$

e யின் குறியீட்டில் உள்ள சார்பை முதலில் u வின் சார்பின் வர்க்கமாக எழுதினல் $\left[\left(u-\rho v\right)^2+\left(1-\rho^2\right)v^2\right]$ ஆகும்.

$$\therefore f(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{\frac{-1}{2(1-\rho)^2}\left[(u-\rho v)^2+(1-\rho^2)v^2\right]}\, du\, dv$$

$W=\dfrac{u-\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}$ $u=v$ எனக் கொள்வோமானல்

$J=\sqrt{1-\rho^2}$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore f(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(w^2+v^2)}\, dw\, dv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-w^2}{2}}\, dw\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-v/2^2}\, dv$$

$$= 1 . 1$$
$$= 1$$

ஆதியை மையமாகக் கொண்ட விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு :

$$M(t_1 t_2) = E e^{t_1 x + t_2 y}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y)\, dx\, dy$$

$u = \dfrac{(x-m_1)}{\sigma_1}$, $v = \dfrac{y - m_1}{\sigma_2}$ எனக் கொள்வோமானுல்

$$J = \sigma_1 \sigma_2$$

$$\therefore M(t_1 t_2) = e^{t_1 m_1 + t_2 m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 \sigma_1 u + t_2 \sigma_2 v}$$

$$\times \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-p^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-p^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)} du\, dv$$

eயின் இரண்டு குறியீடுகளையும் இணைத்தால்

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[u^2 - 2\rho uv + v^2 - 2(1-\rho^2) t_1 \sigma_1 u - 2(1-\rho^2) t_2 \sigma_2 v\right]$$

எனக் கிடைக்கும். முதலில் uவின் சார்பை முழுவர்க்கமாக்கி, பின்னர் vயின் சார்பை வர்க்கமாக்கினுல்

$$\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left[u - \rho v - (1-\rho^2) t_1 \sigma_1\right]^2 + (1-\rho^2)(v - \rho t_1 \sigma_1 - t_2 \sigma_2)^2 - (1-\rho^2)(t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2 \sigma_2^2) \right\}$$

எனக் கிடைக்கும்.

பின்னர் $W = \dfrac{u - \rho v - (1-\rho^2) t_1 \sigma_1}{\sqrt{1-\rho^2}}$

$Z = v - \rho t_1 \sigma_1 - t_2 \sigma_2$ எனக் கொள்வோமானுல்,

$$M(t_1 t_2) = e^{m_1 t_1 + m_2 t_2 + \frac{1}{2}(t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2)}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{w^2}{2} - \frac{z^2}{2}} dw\, dz$$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore M(t_1 t_2) = e^{m_1 t_1 + m_2 t_2 + \frac{1}{2}(t_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1 \sigma_2 + t_2^2 \sigma_2^2)} \quad \cdot 1$$

$$E X = \left[\frac{\partial M}{\partial t}\right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= \left\{ e^{m_1 t_1 + \cdots\cdots} \times \left[m_1 + \tfrac{1}{2}(2 t_1 \sigma_1^2 + 2\rho t^2 \sigma_1 \sigma_2) \right] \right\}_{t_1 t_2 - 0}$$

$$= 1.\, m_1$$

$$EX^2 = \left[\frac{\partial^2 M}{\partial t_1^2}\right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$EX^2 = \left\{ e^{m_1 t \cdots} [m_1 + \tfrac{1}{2}(2 t_1 \sigma_1^2 + 2\rho t_2 \sigma_1 \sigma_2)]^2 + e^{m_1 t + \cdots} (\sigma_1^2) \right\}_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= m_1^2 + \sigma_1^2$$

$$\therefore \text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= m_1^2 + \sigma_1^2 - m_1^2$$

இதே போன்று $EY = m_2$

$\text{Var } Y = \sigma_2^2$ எனக் காட்டலாம்.

$$\text{cov}(X, Y) = EXY - EX \,.\, EY$$

$$EXY = \left[\frac{\partial M}{\partial t_1 \partial t_2}\right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= \left\{ e^{m_1 t_1 + \cdots} \Big([\rho \sigma_1 \sigma_2] + (m_1 + t_1 \sigma_1^2 + t_2 \rho \sigma_1 \sigma_2) \right.$$

$$\left. (m_2 + \rho t_1 \sigma_1 \sigma_2 + t_2 \sigma_2^2) \Big) \right\}_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= \left\{ 1 \left(\rho\, \sigma_1\, \sigma_2 + m_1\, m_2 \right) \right\}$$

$$= \rho\, \sigma_1\, \sigma_2 + m_1\, m_2$$

$$\therefore \operatorname{cov}(X, Y) = EXY - EX\,.\,EY$$

$$= \rho\, \sigma_1\, \sigma_2 + m_1\, m_2 - m_1\, m_2$$

$$= \rho \sigma_1 \sigma_2$$

$$\therefore r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_x\, \sigma_y}$$

$$= \frac{\rho\, \sigma_1\, \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho$$

எனவே பரவலின் சுட்டுறுப்புக்கள் X இன் கூட்டுச் சராசரி திட்டவிலக்கம், Y இன் கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் XY இன் ஒட்டுறவுக் கெழு ஆகியவையாகும்.

X இன் விளிம்புப் பரவல்:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)\right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, dy$$

$$V = \frac{y - m_2}{\sigma_2} \text{ எனக் கொண்டால்}$$

$$\sigma_2\, dv = dy$$

$$\therefore f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) v + v^2\right]}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\, dv$$

e யின் குறியீட்டில் உள்ள சார்பை v யின் முழு வர்க்கமாக்கினால் $f_1(x)$ கீழ்க்கண்டவாறு மாறும்

$$f_1(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2)\left[v-\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\right]^2} dv$$

$$W = \frac{V-\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$$ எனக் கொள்வோமானல்

$$dw = \frac{dv}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\therefore f_1(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}$$

எனவே X இன் விளிம்புப் பரவல் m_1 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் σ_1 ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாகும். இதே போன்று Y இன் விளிம்புப்பரவல் m_2 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும் σ_2 ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாகும்.

X இன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் : Y = y என்று கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்குட்பட்ட X இன் பரவல் $f(X/y) = \frac{f(x,y)}{f_1(y)}$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,{}_1}\,\dfrac{e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2(y-m_2)^2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2)\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2 - (1-\rho^2)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^1\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1{}^2(1-\rho^2)}\left[x - m_1\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right]^2} \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array}$$

X இன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவல் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாகும். ஒரு மாறியின் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவலில் அதன் கூட்டுச்சராசரி நிபந்தனைக்குட்பட்ட மாறிகளின் சார்பாகக் கருதப்படும்போது அது X இன் உடன் தொடர்பு எனப்படுகிறது. எனவே Y இன் மேல் X இன் உடன் தொடர்பு $X = m_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(Y - m_2)$ ஆகும்.

இதே போன்று Yஇன் விளிம்புப் பரவல் $m_2 + \frac{\rho\,\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$ என்ற கூட்டுச் சராசரியை உடைய இயல்நிலைப் பரவலாகும். X இன் மேல் Y இன் உடன் தொடர்பு $Y = m_2 + \frac{\rho\,\sigma_2}{1}(x - m_1)$ ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள் :

1. $X_1 X_2$ ஆகிய இரு திட்ட இயல்நிலை மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு ρ என்றால், $X_1{}^2\, X_2{}^2$ என்ற மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு ρ^2 என நிறுவு. (பா.ப.க.'63)

விடை : $EX_1 = EX_2 = 0$

$$V(X_1) = V(X_2) = 1$$

$$M_{x_1 x_2}(t_1 t_2) = e^{\frac{1}{2}(t_1{}^2 + 2\rho\, t_1\, t_2 + t_2{}^2)}$$

$$\text{cov}(X_1{}^2, X_2{}^2) = E(X_1{}^2 X_2{}^2) - EX_1{}^2\, EX_2{}^2$$

$$\text{Var } X_1{}^2 = EX_1{}^4 - (EX_1{}^2)^2$$

$$\text{Var } X_2{}^2 = EX_2{}^4 - (EX_2{}^2)^2$$

$$E(X_1{}^2, X_2{}^2) = \left[\frac{\partial^4 M(t_1\, t_2)}{\partial^2 t_1\, \partial^2 t_2}\right]_{t_1\, t_2 = 0}$$

$$= 2\rho^2 + 1$$

$$EX_1^4 = \left[\frac{\partial^4 M(t_1 t_2)}{\partial t_1^4} \right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= 3$$

$$EX_2^4 = \left[\frac{\partial^4 M(t_1 t_2)}{\partial t_2^4} \right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= 3$$

$$EX_1^2 = \left[\frac{\partial^2 M(t_1 t_2)}{\partial t_1^2} \right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= 1$$

$$EX_2^2 = \left[\frac{\partial^2 M(t_1 t_2)}{\partial t_2^2} \right]_{t_1 t_2 = 0}$$

$$= 1$$

$$\therefore \text{Cov}(X_1^2, X_2^2) = E(X_1^2 X_2^2) - (EX_1^2)(EX_2^2)$$

$$= 2\rho^2 + 1 - 1$$

$$= 2\rho^2$$

$$V_{ar} X_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2$$

$$= 3 - 1$$

$$= 2$$

$$V_{ar} X_2^2 = EX_2^4 - (EX_2^2)^2$$

$$= 3 - 1$$

$$= 2$$

$$\rho X_1^2 X_2^2 = \frac{\text{Cov}(X_1^2, X_2^2)}{\sqrt{V_{ar} X_1^2}\sqrt{V_{ar} X_2^2}}$$

$$= \frac{2\rho^2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$= \rho^2$$

2. x, y என்ற ராண்டம் மாறிகள் முறையே பூச்சியங்களை கூட்டுச் சராசரியாகவும், σ_1, σ_2 ஆகியவற்றை திட்ட விலக்க மாகவும் கொண்ட இயல் நிலை மாறிகளாகும். இவற்றுக் கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு ρ ஆகும்.

$U = \frac{X}{\sigma_1} + \frac{Y}{\sigma_2}$ and $V = \frac{X}{\sigma_1} - \frac{Y}{\sigma_2}$ ஆகிய மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகள் எனக் காட்டு.

விடை :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(1-\rho^2)\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]} dx\, dy \qquad -\infty < x, y < \infty$$

$$u = \frac{x}{\sigma_1} + \frac{y}{\sigma_2}$$

$$v = \frac{x}{\sigma_1} - \frac{y}{\sigma_2}$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}(u+v) = \frac{x}{\sigma_1}, \quad \tfrac{1}{2}(u-v) = \frac{y}{\sigma_2}$$

$$\therefore x = \frac{\sigma_1}{2}(u+v), \quad y = \frac{\sigma_2}{2}(u-v)$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1}{2} & \frac{\sigma_1}{2} \\ \frac{\sigma_2}{2} & \frac{\sigma_2}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\sigma_1\sigma}{2}$$

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = \tfrac{1}{4}\left[(u+v)^2 + (u-v)^2\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[2(u^2+v^2)\right]$$

$$= \frac{u^2+v^2}{2}$$

$$f(u, v) = f(x, y)\,|J|$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{u^2+v^2}{2} - 2\rho\left(\frac{u^2-v^2}{4}\right)\right\}} \frac{\sigma_1\sigma_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\, 2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{4(1-\rho^2)}\left\{(1-\rho)u^2+(1-\rho)v^2\right\}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2(1-\rho)}\sqrt{2(1+\rho)}} e^{(-1)\left[\frac{u^2}{4(1+\rho)}+\frac{v^2}{4(1-\rho)}\right]} \qquad -\infty < u, v < \infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1+\rho)}} e^{\frac{-u^2}{2.2(1+\rho)}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1-\rho)}} e^{\frac{-v^2}{2.2(1-\rho)}}$$

$$= f_1(u) \times f_2(v) \qquad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty \end{array}$$

எனவே u வும் v யும் சார்பற்ற மாறிகள். u பூஜ்ஜியத்தை கூட்டுச் சராசரியாகவும் $\sqrt{2(1+\rho)}$ ஐ திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை மாறி. v பூஜ்ஜியத்தை கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\sqrt{2(1-\rho)}$ ஐ திட்டவிலக்கமாகவும் கொண்ட ஒரு இயல்நிலை மாறி.

கணக்குகள்

1. ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் கணிதத்தில் எடுத்த மார்க்குகளின் கூட்டுச் சராசரி 60, திட்டவிலக்கம் 15. அதே மாணவர்கள் ஆங்கிலத்தில் எடுத்த மார்க்குகளின் கூட்டுச் சராசரி 30 திட்டவிலக்கம் 10. இரு மார்க்குகளுக்குமிடையே உள்ள ஒட்டுறவு 5. இரு மார்க்குகளின் பரவல் இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலின்படி நடக்கின்றன என அனுமானித்து, இரு பாடங்களிலும் சேர்ந்து 50 மார்க்குகளுக்கு குறைவாக எடுத்துள்ளோரின் விகிதம் காண்க. இரண்டிலும் சேர்ந்து 120 க்கு அதிகமாக எடுத்தோரின் விகிதம் காண்க.

2. கீழ்க்கண்ட இரு மாறி இயல்நிலைப் பரவலுக்குரிய சுட்டுறுப்புகளைக் காண்க.

$$f(x,y) = C \cdot e^{-\frac{1}{216}\left[16(x-12)^2-12(x-12)(y+3)+9(y+3)^2\right]}$$

3. $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = 16$, $\sigma_2^2 = 25$ $\rho = \cdot 6$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய இருமாறி இயல்நிலை மாறிக்கு கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

$$\text{i)}\quad P\left[X > 3{\cdot}4,\ Y > 1{\cdot}2\right]$$

$$\text{ii)}\quad P\left[3 < Y < 8/X = 7\right]$$

4. X, Y என்ற இரு ராண்டம் மாறிகளின் அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x, y) = K\, e^{\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right]} \qquad -\infty < x, y < \infty$$

என்றால்

i) K ஐ மதிப்பிடு

ii) X, Y இன் விளிம்புப் பரவல்களைக் காண்க

iii) X = x கொடுக்கப்பட்ட Y இன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட பரவலைக் காண்க.

5. X_1, X_2 என்ற ராண்டம் மாறிகள் பூச்சியத்தை கூட்டுச் சராசரியாகக் கொண்ட, ஒன்றை திட்ட விலக்கமாகக் கொண்ட சார்பற்ற இயல்நிலை மாறிகளாயிருக்கட்டும்.

$$Y_1 = m_1 + l_{11} X_1 + l_{12} X_2$$
$$Y_2 = m_2 + l_{21} X_1 + l_{22} X_2 \text{ என்ற}$$

புதிய மாறிகளாயிருக்கட்டும். Y_1, m_1 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\mu_{20} = l_{11}^2 + l_{12}^2$ என்ற மாறுபாடு உடையதாகவும், Y_2, m_2 ஐ கூட்டுச் சராசரியாகவும், $\mu_{02} = l_{21}^2 + l_{22}^2$ என்ற மாறுபாடு உடையதாகவும், $\operatorname{cov}(Y_1 Y_2) = \mu_{11} = l_{11} l_{21} + l_{12} l_{22}$ என்றுடையதாகவும் உள்ளன என நிரூபி.

6. X_1 Y என்ற இரு மாறிகளின் தொடர் கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x_1\, y) = \frac{2\, e^{-\frac{4}{6}\left[x^2 - xy + y^2\right]}}{2\pi\sqrt{3}} \qquad -\infty \le x, y \le \infty$$

என்றால்

(i) பரவலின் சுட்டுறுப்புக்களை காண்க.

(ii) $[X > 1, Y > 0]$ என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை காண்க.

(iii) $\left[X > 0, Y > 0 \,\middle/\, Y > 1\right]$ என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண்க.

10. ஒருங்குத் தேற்றங்கள்

(LIMIT THEOREMS)

செபிசிவ்வின் சமமின்மை (Chebychev's Inequality):

X என்ற வாய்ப்பு மாறியின் கூட்டுச்சராசரி μ என்றும் திட்ட விலக்கம் σ வென்றும் இருக்கட்டும் $[\ |X-\mu| \geq k\ ]$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு அதிகபட்சம் $\frac{\text{Var X}}{k^2}$ என்றிருக்கும். அதாவது $P[\ |X-\mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

நிரூபணம்: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$

$$= \int_{|x-\mu| \geq \epsilon} (x-\mu)^2 f(x)\, dx + \int_{|x-\mu| < \epsilon} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

$$\geq \int_{|x-\mu| \geq \epsilon} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

$$\geq \epsilon^2 \int_{|x-\mu| \geq \epsilon} f(x)\, dx \quad (\because |X-\mu| \geq \epsilon)$$

$$= \epsilon^2 P[\ |X-\mu| \geq \epsilon] \text{ (வரையறைப்படி)}$$

$$\therefore P[\ |X-\mu| \leq \epsilon] \leq \frac{\text{Var X}}{\sigma^2}$$

எடுத்துக்காட்டு கணக்குகள்

1. X என்ற வாய்ப்பு மாறி $n=10$, $P=\frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புக் களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலாகும். இந்த மாறிக்கு

$[\,|X-5|<3]$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய குறைந்தபட்ச நிகழ்தகவைக் காண்க.

X இன் கூட்டுச் சராசரி $= np$

$= 10 + \cdot 5$

$= 5$

X இன் மாறுபாடு $= npq$

$= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= 2{\cdot}5$

செபுசிவின் சமமின்மைப்படி

$$P\,[\,|X-5| \geq 3] \leq \frac{\sigma^2}{9}$$

$$= \frac{2{\cdot}5}{9} = \frac{5}{18}$$

$$\therefore P\,[\,|X-5| < 3] > 1 - \frac{5}{18}$$

$$= \frac{13}{18}$$

எனவே $[\,|X-5|<3]$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய குறைந்தபட்ச நிகழ்தகவு $\frac{13}{18}$.

2. ஒரு பீரங்கி ஒரு இலக்கைத் தாக்குவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$. n முறை பீரங்கி சுடப்பட்டால்,

$$\frac{\text{இலக்கைத் தாக்கும் குண்டுவீச்சுக்கள்}}{\text{மொத்த குண்டுவீச்சுக்கள்}}$$ என்ற விகிதத்திற்கும் அதன் எதிர்பார்த்தல் அளவிற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு $\frac{1}{4}$க்கும் குறைவாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்ச்சியின் குறைந்தபட்ச நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என்றிருப்பதற்குரிய n இன் மதிப்பைக் காண்க.

விடை: மொத்த குண்டு விச்சுக்களின் எண்ணிக்கை n. இவற்றில் இலக்கைத் தாக்கும் குண்டு வீச்சுக்களின் எண்ணிக்கை X என்றிருக்கட்டும்.

X இன் பரவல் $(n, \frac{1}{4})$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலாகும்.

$$\text{எனவே} \quad EX = \frac{n}{4}$$

$$\text{Var } X = n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\therefore \; E\frac{X}{n} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var } \frac{X}{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n}$$

∴ செபுசிவின் சமமின்மையைப் பயன்படுத்தி

$$P\left[\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{4}\right] \leq \frac{\text{Var } \frac{X}{n}}{(1/4)^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{4})^2}$$

$$= \frac{3}{n}$$

$$\therefore \; P\left[\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}\right] > 1 - \frac{3}{n}$$

இந்த நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தபட்சம் $\frac{1}{2}$ என்றிருக்க வேண்டுமானால் $\frac{3}{n}$ இன் மதிப்பு அதிகபட்சம் $\frac{1}{2}$ என்றிருக்க வேண்டும். அதாவது n இன் மதிப்பு குறைந்த பட்சம் 6 என்றிருக்க வேண்டும்.

3. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களடங்கிய ஒரு குவியலின் தரத்தை நிர்ணயிக்க அதிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் n உருவ அளவுடைய கூறு எடுக்கப்படுகிறது. அதில் d என்பன குறைபாடுகளின் எண்ணிக்கை என்றால் $\frac{d}{n}$ என்ற குவியலின் குறைப்பின்னம் (fraction defective) கணக்கிடப்படுகிறது. இந்த முறையில் கணக்கிடப்படும் குறைப் பின்னத்திற்கும், குவியலின் உண்மையான குறைப்பின்னத்திற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு 0·1 க்கும் குறைவாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்த பட்சம் 0·95 என்றிருப்பதற்குரிய n இன் மதிப்பைக் காண்க.

விடை : உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் குறையுடைய தாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு P என்றிருக்கட்டும். எனவே குறையில்லாதிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $(1-P) = q$ ஆகும். குவியலிலிருந்து n பொருட்களை எடுத்தால் அதில் குறையுடைய பொருள்களின் எண்ணிக்கை X என்ற வாய்ப்பு மாறி (n, P) என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்புப் பரவலை பின்பற்றும்.

$$\therefore\ EX = nP$$

$$\text{Var } X = nPq$$

$$E\frac{X}{n} = P$$

$$\text{Var}\frac{X}{n} = \frac{Pq}{n}$$

குவியலின் குறைப்பின்னம் p′ என்றிருக்கட்டும். p′க்கும் $\frac{X}{n}$ க்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு 0·1 ஐ விட குறைவா யிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு குறைந்தது 0·95 என இருக்கும்படி n ஐ மதிப்பிட வேண்டும்.

செபுசிவின் சமமின்மைப்படி

$$P\left[\left|\frac{X}{n} - p'\right| \geq \cdot 01\right] \leq \frac{Pq}{n(\cdot 01)^2}$$

$$\therefore P\left[\left|\frac{x}{n} - p'\right| < .01\right] > 1 - \frac{Pq}{n(\cdot 01)^2}$$

இந்த நிகழ்தகவு குறைந்தது 0·95 என்றிருக்க வேண்டுமென்றால் $\frac{Pq}{(\cdot 1)^2 n}$ அதிகபட்சம் 0·05 என்றிருக்க வேண்டும். இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு n ஐ மதிப்பிட வேண்டும். P யின் மதிப்பு இன்னவென்று தெரியாதாகையால் Pq அதிகபட்சமா யிருக்கும்படி மதிப்பிடவேண்டும். கணித முறைப்படி $P = \frac{1}{2}$ என்றிருக்கும்போது Pq உயர்ந்த பட்ச மதிப்பைப் பெறுகிறது எனக் காணலாம். எனவே $\frac{Pq}{(\cdot 1)^2 n}$ இல் Pq இன் உயர்ந்த மதிப்பு $\frac{1}{4}$ ஆதலால் $\frac{1}{4n(\cdot 1)^2}$ அதிக பட்சம் 0·05 என்றிருக்கும்படி n ஐ மதிப்பிட வேண்டும்.

$$\frac{1}{4\,n\cdot 01} \leq \cdot 05$$

அதாவது $\frac{25}{n} \leq \cdot 05$

$$n \geq \frac{25}{\cdot 05} \geq 500$$

குவியலிலிருந்து குறைந்தது 500 பொருட்களை சம வாய்ப்பு முறையில் எடுத்தால் கூறின் குறைப் பின்னத்திற்கும், குவியலின் குறைப் பின்னத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு 0·1 அல்லது அதற்கு குறைவாயிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு 0·95 என்றிருக்கும்.

நிகழ்தகவு முறையில் ஒருங்குதல் $\left\{X_n\right\}$ என்பது வாய்ப்பு மாறிகளின் தொகுதியாயிருக்கட்டும். c என்பது ஒரு *நிலையெண்* என்றால் $P\left[\,|X_n - c| > \epsilon\right] \to 0 \text{ as } n \to \infty$ என்றிருந்தால் $\left\{X_n\right\}$ c க்கு நிகழ்தகவு முறையில் ஒருங்குகிறது என்கிறோம். இதையே ஒருங்கும் பண்பை பயன்படுத்தி

$P\left[\,|X_n - c| > \epsilon\right] < \eta$ for $n \geq n_0$ எனவும் எழுதலாம். இது $X_n \xrightarrow{P} c$ என எழுதப்படுகிறது. மேலும் $\left\{X_n\right\}$ c க்கு நிகழ் தகவு முறையில் ஒருங்கும்போது $P\left[\,|X_n - c| \leq \epsilon\right] \to 1$ என்பதும் உண்மையாகும்.

நலிந்த பேரினங்களின் விதி (Weak Law of Large Numbers) :

$\left\{X_n\right\}$ ஒரு வாய்ப்பு மாறிகளின் தொகுதியாயிருக்கட்டும்.

$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ என்றும்

$ES_n = EX_1 + EX_2 + ... + EX_n$ என்றுமிருக்கட்டும்.

$\frac{S_n - ES_n}{n}$ பூஜ்ஜியத்திற்கு நிகழ்தகவு முறையில் ஒருங்கினால் $\left\{X_n\right\}$ நலிந்த பேரினங்களின் விதியைப் பின்பற்றுகிறது என்கிறோம். அதாவது $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{ES_n}{n}$. $\left\{X_n\right\}$ நலிந்த பேரினங்களின் விதியைப் பின்பற்றினால் $\epsilon > o_1$ $\eta > o$ என்ற நேர்மறை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால் m என்ற நேர்மறை முழு எண்ணை கீழ்க்கண்ட நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்யும் வகையில் காணலாம்.

$$P\left[\left|\frac{S_n ES_n}{n}\right| > \epsilon\right] < \eta \text{ for } n \geq m$$

செபுசிவின் நிபந்தனை (Chebychev's Condition):

$\lim_{n \to \infty} \frac{\text{Var } Sn}{n^2} = 0$ என்றிருந்தால் $\{ X_n \}$ நலிந்த பேரினங்களின் விதியை (WLLNஐ) பின்பற்றுகிறது.

நிரூபணம் : $\epsilon > 0, \eta > 0$ கொடுக்கப்பட்ட எண்களாயிருக்கட்டும்.

$$P\left[\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \epsilon\right] = P\left[\left|S_n - ES_n\right| > n\,\epsilon\right]$$

$$< \frac{\text{Var } S_n}{n^2 \epsilon^2} \text{ (செபுசிவின் சமமின்மைப்படி)}$$

$\frac{\text{Var } S_n}{n^2} \to 0$ as $n \to \infty$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனை $\therefore \frac{\text{Var } S_n}{n^2 \epsilon^2} \to 0$ as $n \to \infty$

எனவே $\eta > 0$ கொடுக்கப்பட்டால்

$$\frac{\text{Var } S_n}{n^2 \epsilon^2} < \eta \text{ for } n \geq m$$

$$\therefore P\left[\;|S_n - ES_n| > n\epsilon\right] < \frac{\text{Var } S_n}{n^2 \epsilon^2} < \eta \text{ for } n \geq m$$

எனவே $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{p} 0$ as $n \to \infty$

அதாவது $\{X_n\}$ WLLN ஐப் பின்பற்றுகிறது.

$\{X_n\}$ நலிந்த G பரினங்களின் விதியைப் பின்பற்றுவதற்குரிய அவசியமான நிபந்தனை: $\{X_n\}$ நலிந்த பேரினங்களின் விதியைப் பின்பற்றுகிறது. $EX_n = 0$, nஇன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் என்றால்

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0 \text{ as } n \to \infty$$

நிரூபணம் : $S_n - ES_n = X_1 + \ldots X_n - (EX_1 + \ldots + EX_n$

$$= X_1 + \ldots + X_n \quad (\because E\,X_i = 0)$$

$$S_{n-1} - ES_{n-1} = X_1 + \ldots + X_{n-1}$$

$$\therefore X_n = [S_n - ES_n] - [S_{n-1} - ES_{n-1}]$$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - ES_n}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S_{n-1} - ES_{n-1}}{n-1}$$

$$\xrightarrow{p} 0 \text{ as } n \to \infty \left(\because \{X_n\} \text{ WLLN ஐ பின்பற்றுவதால்} \right)$$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள் :

1. X_i என்ற வாய்ப்பு மாறிகள் சார்பற்றவையாயும் $EX_i^2 < c$ (எல்லா iயின் மதிப்புகளுக்கும்) என்றுமிருந்தால் $\{X_i\}$ நலிந்த பேரினங்களின் விதியை பின்பற்றுகிறது.

விடை : X_i சார்பற்ற மாறிகளாதலால்

$$\begin{aligned} \text{Var } S_n &= \text{Var } X_1 + \text{Var } X_2 + \dots + \text{Var } X_n \\ &\leq E X_1^2 + \dots\dots + EX_n^2 \\ &= nc \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\text{Var } S_n}{n^2} \leq \frac{c}{n} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

எனவே செபுசிவின் நிபந்தனைப்படி $\{X_i\}$ WLLN ஐப் பின்பற்று கிறது.

2. cov $(X_i, X_j) \leq 0$ எல்லா i, j யின் மதிப்புகளுக்கும் என்றும் $E X_i^2 < c$ (எல்லா iயின் மதிப்புகளுக்கும்) என்றுமிருந் தால் $\{X_j\}$ நலிந்த பேரினங்களின் விதியைப் பின்பற்றுகிறது.

விடை : $\text{Var } S_n = \text{Var } (X_i + \dots X_n)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} \text{Var } X_i + \sum_{i \neq j} \text{Cov } (X_i, X_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \text{Var } X_i \; (\because \text{Cov } (X_i, X_j \leq 0) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 \\ &= nc \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\text{Var } S_n}{n^2} = \frac{c}{n} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

எனவே செபுசிவின் நிபந்தனைப்படி $\{X_i\}$ WLLN ஐப் பின்பற்று கிறது.

அடுத்து சிறப்பியல்புச் சார்பிற்கும் பரவல் சார்பிற்கும் உள்ள 1 – 1 உறவைச் சித்தரிக்கும் ஒருங்குத் தேற்றத்தைப் பார்ப்போம்.

தொடர் இடைவெளி (Continuity Interval) : $[\alpha, \beta]$ என்ற இடைவெளியை எடுத்துக் கொள்வோம். F (x) என்ற பரவல் சார்பு α, β என்ற இரு புள்ளிகளில் தொடர்புடையதாக இருந்தால், $[\alpha, \beta]$ என்ற இடைவெளி தொடர் இடைவெளி யெனப்படுகிறது.

தேற்றம்: F (x) என்ற பரவல் சார்பிற்கு $[a-h, a+h]$ என்ற இடைவெளி ஒரு தொடர் இடைவெளியாக இருந்து, ϕ (t) என்பது அந்தப் பரவலின் சிறப்பியல்பு சார்பாக இருந்தால்

$$F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{Sin } th}{t} e^{-ita} \phi(t)\, dt \text{ ஆகும்.}$$

நிரூபணம்: $J = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{Sin } th}{t} e^{-ita} \phi(t)\, dt$ என்க.

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\text{Sin } th}{t} e^{-ita}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ita}\; dF(x)\right\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\text{Sin } th}{t} e^{it(x-a)}dt\right\}dF$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x, T)\, dF$$

$$g(X, T) = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\text{Sin } th}{t}\cos(x-a)\,tdt + \frac{i}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\text{Sin } th}{t}\text{Sin}(x-a)td$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\text{Sin } th}{t} \cos (x-a)tdt$$ (இரட்டைச் சார்பாதலால்)

$I_2 = 0$ (ஒற்றைச் சார்பாதலால்)

எனவே $g(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\text{Sin } th}{t} \cos (x-a)tdt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\text{Sin } (x-a+h)t - \text{Sin } (x-a-h)t}{t} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\text{Sin } (x-a+h)t}{t} dt - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\text{Sin } (x-a-h)t}{t} dt$$

T அனந்தத்தை நெருங்கும்போது g (x, T)யின் தன்மையை அறிய கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin } \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha > 0$$

$$= 0 \qquad \alpha = 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \qquad \alpha < 0$$

$$\therefore \lim_{T\to\infty} g(x, T) = \frac{1}{\pi} \times -\tfrac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2\pi}\right)$$

$$= 0 \qquad x < a - h$$

$$= 1/2 \qquad x = a - h$$

$$= 1 \qquad a - h < x < a + h$$

$$= 1/2 \qquad x = a + h$$

$$= 0 \qquad x > a + h$$

$$\therefore J = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, T) \, d F(x)$$

$$\lim_{T\to\infty} J = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,T)\, dF(x)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{a-h} g(x,T)\, dF + \int_{a-h}^{a+h} g(x,T)\, dF + \int_{a+h}^{\infty} g(x,T)\, dF\right]$$

$$= 0 + \int_{a-h}^{a+h} dF(x) + 0$$

$$\therefore = F(a+h) - F(a-h)$$

தேற்றம் நிரூபணமாகிறது.

மாற்றுத் தேற்றம் (INVERSION Theorem): $\phi(t)$ தொகைப் படுத்தப்படும் நிலையில் இருந்தால் அதன் நிகழ் தகவு அடர்த்திச் சார்பு கீழ்க்கண்ட முறையில் கணக்கிடப் படும்.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, \phi(t)\, dt$$

நிரூபணம்: முந்திய தேற்றத்தின்படி

$$F(a+h) - F(a-h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } th}{t}\, e^{-itx}\{\phi(t)\}\, dt$$

$a = x$ என கொள்வோமானல்

$$F(x+h) - F(x-h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } th}{t}\, e^{-itx}\{\phi(t)\}\, dt$$

$$\therefore \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } th}{th}\, e^{-itx}\{\phi(t)\}\, dt$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } th}{th}\, e^{-itx}\{\phi(t)\}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin } th}{th} e^{-itx} \{\phi(t)\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \{\phi(t)\} dt$$

அதாவது $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) \, dt$

எடுத்துக் காட்டு கணக்குகள்

1. $e^{-|t|}$ ஐ சிறப்பியல் சார்பாகக் கொண்ட வாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

விடை : மாற்றுத் தேற்றத்தின்படி நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-itx} e^{t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-itx} e^{-t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix} \right]_{-\infty}^{0} \quad \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-e^{-t(1+ix)}}{(1+ix)} \right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1-0}{1-ix} + \frac{1-0}{1+ix} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

2. $e^{\frac{-t^2}{2}}$ ஐ சிறப்பியல்புச் சார்பாக உடைய வாய்ப்பு மாறியின் அலைவெண் சார்பைக் காண்க.

விடை : மாற்றுத் தேற்றத்தின்படி

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2 \cdot itx)} dt$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt$$

$y = t+ix$ எனக் கொள்க

$dy = dt$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

$= \dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ திட்ட இயல் நிலைமாறியின் அலைவெண் சார்பாகும்.

சார்பற்ற மாறிகளுக்கு மைய ஒருங்கு தேற்றம் (The Central limit theorem for independent random variables)

தேற்றம் ; $\{X_k\}$ சார்பற்ற மாறிகளின் தொகுதியாயிருக்கட்டும். EX_kயும் Var X_kயும் திட்டமாக உள்ளன. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ என்றும் $ES_n = EX_1 + \ldots + EX_n$, s^2_n = Var S_n என்றுமிருக்கட்டும். $\frac{S_n - ES_n}{s_n}$ இன் பரவல் சார்பு F_n (x) என்றிருக்

கட்டும். n பெரிதாகும்போது $F_n(x)$, $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ என்ற இயல்நிலை மாறியின் பரவல் சார்பிற்கு ஒருங்கினால் $\{X_k\}$ மைய ஒருங்குத் தேற்றத்தின்படி நடக்கிறது எனக் கூறுகிறோம்.

மைய ஒருங்குத் தேற்றத்திற்கு லிண்டபெர்க் - லெவியின் நிபந்தனை (Lindeberg-Levy condition for central limit theorem): $\{X_k\}$ சார்பற்ற ஒரே பரவலுடைய வாய்ப்பு மாறிகளின் தொகுதி. $EX_k| = m$, $\text{Var } X_k = \sigma^2$ என்ற திட்டமான மதிப்புகளையுடைய தாக உள்ளது. இந்தப் பண்புகள் உடைய தொகுதி $\{X_k\}$ மைய ஒருங்குத் தேற்றத்தை பின்பற்றுகிறது.

நிரூபணம்: $EX_k = m$, $\text{Var } X_k = \sigma^2$ (kயின் எல்லா மதிப்பு களுக்கும்)

$(X_k - m)$ இன் சிறப்பியல்புச் சார்பு $\phi_k(t)$ என்றிருக்கட்டும்

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + 0(|z|^2) \text{ (மக்னாரின் விரிப்பு)}$$

$$\therefore e^{it(X_k - m)} = 1 + it(X_k - m) + \frac{(it)^2}{2!}(X_k - m)^2 + 0(|t|^2)$$

$$\therefore E e^{it(X_k - m)} = E\left[1 + it(X_k - m) + \frac{(it)^2}{2!}(X_k - m)^2 + 0(|1|^2)\right]$$

அதாவது $\phi_k(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + 0(|t|^2)$

எல்லா X_k இன் பரவலும் ஒன்றே ஆதலால் எல்லா X_k க்கும் இது உண்மையாகும்.

$\frac{S_n - ES_n}{s_n}$ இன் சிறப்பியல்பு சார்பு $\phi_{\frac{S_n - ES_n}{s_n}}(t)$ ஆகும்

$$\therefore \phi_{\frac{S_n - ES_n}{s_n}}(t) = E\left[e^{\frac{it}{s_n}(X_1 - EX_1 + \ldots + X_n - EX_n)}\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{\frac{it}{s_n}(X_k - EX_k)}\right]$$

$$S_n^2 = \text{Var } X_1 + \dots + \text{Var } X_n$$
$$= n\sigma^2$$

$$\therefore E\, e^{\frac{it}{s_n}(x_k - Ex_k)} = E\, e^{\frac{it}{s_n}(x_k - m)}$$

$$= \phi_k \left(\frac{t}{s_n}\right)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2s_n^2}\sigma^2 + 0\left(\frac{|t|^2}{s_n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n\sigma^2} + 0\left(\frac{|t|^2}{n\sigma^2}\right)$$

$$\therefore \phi_{\frac{S_n - ES_n}{s_n}}(t) = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{|t|^2}{n\sigma^2}\right)\right]$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{|t^2|}{n\sigma^2}\right)\right]^n \to e^{-t^2/2} \quad \text{as } n \to \infty$$

அதாவது $\frac{S_n - ES_n}{S_n}$ இன் சிறப்பியல்பு, சார்பு திட்ட இயல்நிலை மாறியின் சிறப்பியல்புச் சார்பிற்கு ஒருங்குகிறது. எனவே $\frac{S_n - ES_n}{S_n}$ இன் பரவல் சார்பு திட்ட இயல்நிலை மாறியின் பரவல் சார்பிற்கு ஒருங்குகிறது.

பயிற்சி

1. X, $n = 14$, $P = \frac{1}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புக்களை உடைய ஈருறுப்பு வாய்ப்பு மாறியென்றால் $[|X - 7| < 2]$ என்ற நிகழ்ச்சிக்குரிய குறைந்த பட்ச நிகழ்தகவை செபுசிவின் சமமின்மையை பயன்படுத்தி காண்க.

2. சராசரியாக 3 இல் 2 பங்கு விதைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட விதை ரகத்தில் முளைக்கும் தன்மை பெற்றுள்ளன. 100 விதைகள் விதைக்கப்பட்டதில் முளைக்கும் விதைகளின் எண்ணிக்கைக்கும் எதிர்பார்க்கும் முளைகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடு 10க்கு மேற்படாமல் இருப்பதற்குரிய உயர்ந்த பட்ச நிகழ்தகவைக் காண்க.

11. விளையாட்டுக் கொள்கை

(GAME THEORY)

பொருளாதாரம், சமூகம், அரசியல் போன்ற பல்வேறு துறைகளிலும் விளையாட்டுக் கொள்கையானது ஒரு முக்கிய நிலையைப் பெற்று அமைகிறது. பெரும்பாலும் போட்டிகள் நிகழும் தருணத்தில்இக் கொள்கையின் மூலம், போட்டி போடும் இரு குழுக்களும் எம் முறையில் தங்களின் தந்திரங்களையோ அல்லது திறமைகளையோ பயன்படுத்தி தங்களுக்குச் சாதகமாக அமைத்துக்கொள்ள முடியும் என்பதை அறியலாம். வணிகம் வியாபாரம் போன்ற துறைகளில் போட்டிகள் பல்வேறு குழுக்களிடையே இருப்பதை நாம் கண்கூடாகக் காண்கிறோம். இது போன்றே அரசியல் துறையிலும் பல்வேறு கட்சிகளுக் கிடையே போட்டிகள் இருப்பதைக் காண்கிறோம். இவ்வத்தி யாயத்தில் "விளையாட்டுக் கொள்கை" என்றால் என்ன என்பதையும் இதன் பொதுவான அமைப்பைப் பற்றியும், நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் அமைந்த நிலையைப் பற்றியும் காண்போம்.

$P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ என்ற n விளையாட்டுக்காரர்கள் ஒரு விளையாட்டை விளையாடினால் i- ஆவது விளையாட்டுக்காரரான P_i என்பவர் தனக்கு மிகவும் சாதகமான முறையில் அமைய அவ்விளையாட்டை விளையாட வேண்டும் என்பதைப் பற்றி 'விளையாட்டுக் கொள்கை" அமைவதாக வான் நியூமேன் என்பவர் வரையறுத்துள்ளார்.

ஒரு விளையாட்டு என்பது போட்டியோடு அமையவேண்டு மெனில் அவ்விளையாட்டுக்கு இறுதிக் கட்டம் (end state) என்ற நிலை இருத்தல் அவசியம். அவ்விறுதிக் கட்டத்தில் ஒரு ஆட்டக் காரர் வெற்றியுடனும், மற்றொருவர் தோல்வியுடனும் இருக்கக் காணலாம்.

ஒரு விளையாட்டைப் பற்றி விவரிக்கும் முன்பாக சில வரையறைகளைக் காண்போம்.

தந்திரம் (Strategy) : விளையாட்டு நடந்துகொண்டிருக்கும் பொழுது ஒரு ஆட்டக்காரர் தன் விளையாட்டைத் துவக்கும் முன்பு கையாளும் யுக்தியாகும். அவர் பல யுக்திகளைப் பெற்றிருந்தாலும் விளையாடும் தருணத்தில் பயன்படுத்தும் யுக்தியை தந்திரம் என்று கூறுகிறோம். எனவே விளையாட்டை விளையாடும்பொழுது தீர்மானம் செய்யப்படும் யுக்தியை தந்திரம் என்கிறோம்.

இழப்பு-ஈட்டிப்பு (Pay off) : பொதுவாக ஒவ்வொரு விளையாட்டின் இறுதியிலும் ஒருவர் வெற்றி பெற்றதற்கு அறிகுறியாக மற்றொருவரிடமிருந்து பணத்தைப் பெறவேண்டிய நிலை ஏற்படும். இதில் ஒரு விளையாட்டுக்காரர் வெகுமதியாகப் பணத்தைப் பெறுகிறார். அதே சமயத்தில் மற்றொருவர் அப் பணத்தை இழக்கிறார். இத் தொகையை "இழப்பு-ஈட்டிப்பு" (Pay-off) என்கிறோம்.

எனவே விளையாட்டைப் பற்றி தெரிவிக்கும்பொழுது, ஒவ்வொரு ஆட்டக்காரர்களின் தந்திரங்களும், இழப்பு-ஈட்டிப்புகளும் தெரிவித்தல் அவசியமாகிறது.

இரு நபர் பூச்சியக் கூட்டு நீள் சதுர விளையாட்டு (Two person zero-sum Rectangular game) :

இரண்டு பேர்கள் விளையாடும் ஒரு ஆட்டத்தின் இறுதியில் ஒருவர் பெற்ற மொத்தத் தொகையையும், மற்றொருவர் இழந்த மொத்தத் தொகையையும் கூட்டினால் பூச்சியம் என்பதால் இவ் விளையாட்டை இரண்டு பேர் பூச்சியக் கூட்டு விளையாட்டு என்று கூறுகிறோம். உதாரணமாக "போக்கர்" போன்ற விளையாட்டுகளில் ஒருவர் தோல்வியினால் இழக்கும் மொத்தத் தொகையானது மற்றொருவர் வெற்றியினால் ஈட்டும் மொத்தத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

இருவர் விளையாடும் விளையாட்டில் P என்ற ஆட்டக்காரர் m தந்திரங்களையும், Q என்ற ஆட்டக்காரர் n தந்திரங்களையும் பெற்றிருப்பதாகக் கொள்வோம். பிறகு இழப்பு-ஈட்டிப்பான a_{ij} ஐ $(m \times n)$ தரத்தைப் பெற்ற அணியாகக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கிறோம்,

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதில் a_{ij} ஆனது நேராகவோ அல்லது எதிராகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ இருக்கலாம்.

a_{ij} என்பது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் j என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, முதல் ஆட்டக்காரருக்கு, அவர் i என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது செலுத்தும் தொகையாகும்.

ஒரு விளையாட்டில் ஒரு ஆட்டக்காரர் பயன்படுத்தும் தந்திரங்கள் மற்றொரு ஆட்டக்காரருக்கு தெரிந்திருந்து அதே போன்று மற்றொரு ஆட்டக்காரரின் தந்திரங்கள் முதல் ஆட்டக்காரருக்குத் தெரிந்திருந்தால் அவ்விளையாட்டை தூய தந்திர விளையாட்டு (Pure Strategy Game) என்று கூறுகிறோம். இவ்விளையாட்டில் இரு ஆட்டக்காரர்களும் புத்திசாலிகள் என்றும், ஒருவரின் தந்திரம் மற்றொருவருக்குத் தெரியும் என்ற தற்கோள்களை (Assumption) மேற்கொள்கிறோம். இவ்விளையாட்டின் இழப்பு - ஈட்டிப்பு அணியானது நீள்சதுரமாக அமைந்தால் அவ்விளையாட்டை நீள்சதுர விளையாட்டு என்று கூறுகிறோம்.

சேணப் புள்ளி (Saddle point) $m \times n$ என்ற தரத்தைப் பெற்ற $A = (a_{ij})$ என்ற அணியில் ஒரே சமயத்தில் ஒவ்வொரு நிறையின் நீச மதிப்பின் உச்சமானதும், ஒவ்வொரு நிரலின் உச்ச மதிப்பின் நீசமானதும் சமமாக இருந்தால் அப் புள்ளியை சேணப்புள்ளி என்றும் அம் மூலகத்தை அவ்விளையாட்டின் மதிப்பு (Value of the game) என்றும் கூறுகிறோம்.

ஒரு விளையாட்டில் சேணப்புள்ளி அமைந்திருந்தால் அவ் விளையாட்டை சேணப்புள்ளி பெற்ற விளையாட்டு என்றும் அல்லது தூய தந்திரங்களைப் பெற்றமைந்த விளையாட்டு என்றும் கூறுகிறோம். ஒரு விளையாட்டில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சேணப்புள்ளி அமைந்திருக்கலாம். மேலும் சேணப்புள்ளி இல்லாமலும் இருக்கலாம். சேணப்புள்ளி இல்லாத ஒரு விளையாட்டை கலப்புத் தந்திரங்களை (Mixed strategies) ப் பெற்ற விளையாட்டு என்கிறோம்.

ஒரு விளையாட்டின் தீர்வைக்காண, ஒவ்வொரு ஆட்டக்காரரின் மிகச் சிறந்த தந்திரங்களும், அவ்விளையாட்டின் மதிப்பும் தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

இரு நபர் பூச்சியக் கூட்டு நீள் சதுர விளையாட்டின் தீர்வு (சேணப் புள்ளியுடன்) (Two person zero - sum rectangular game with saddle point)

$i = 1, 2 \ldots m$ என்ற தந்திரங்களைப் பெற்ற P என்ற ஆட்டக்காரரையும், $j = 1, 2 \ldots n$ என்ற தந்திரங்களைப் பெற்ற Q என்ற

ஆட்டக்காரரையும் கொண்ட பூஜ்ஜியக் கூட்டு விளையாட்டைக் கருதுவோம். (a_{ij}) என்பது இழப்பு - ஈட்டிப்பு அணி எனில் a_{ij} என்பது Q என்ற ஆட்டக்காரர் P என்ற ஆட்டக்காரருக்கு செலுத்தும் தொகையாகும். இதில் Q என்ற ஆட்டக்காரர் j என்ற தந்திரத்தையும், P என்ற ஆட்டக்காரர் i என்ற தந்திரத்தையும் பயன்படுத்துகிறார். Q என்ற ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினாலும் P என்ற ஆட்டக்காரர் i என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது அவர் நிச்சயமாக நீசம் a_{ij} ஐப் பெறுவார். எனவே P என்ற ஆட்டக்காரர் தனக்கு மிகவும் சாதகமாக அமைய நீசம் a_{ij} களின் உச்சத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அதாவது $\underset{i}{\text{உச்சம்}}\ \underset{j}{\text{நீசம்}}\ a_{ij}$ ஆகும். ——— (1)

இப்பொழுது Q என்ற ஆட்டக்காரர், P என்ற ஆட்டக்காரரின் ஈட்டிப்பைக் குறைக்க தன் வசமுள்ள தந்திரங்களின் மிகச் சிறந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்த முயலுவார். Q என்ற ஆட்டக்காரர் j என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது P ஆனவர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினாலும் அவர் உச்சம் a_{ij} க்கு மேல் பெறமுடியாது. எனவே Q க்குச் சாதகமாக அமையவேண்டுமென்றால் உச்சம் a_{ij}-களின் நீசத்தைத் தேர்ந்தேடுக்க வேண்டும். அதாவது $\underset{j}{\text{நீசம்}}\ \underset{i}{\text{உச்சம்}}\ a_{ij}$ ஆகும் → (2)

(1) லுள்ள மதிப்பை, விளையாட்டின் கீழ்மதிப்பு என்கிறோம். அதாவது $\underset{i}{\text{உச்சம்}}\ \underset{j}{\text{நீசம்}}\ a_{ij}$-ஐ விளையாட்டின் கீழ்மதிப்பு என்கிறோம். இதே போன்று (2)லுள்ள மதிப்பை, விளையாட்டின் மேல்மதிப்பு என்கிறோம். அதாவது $\underset{j}{\text{நீசம்}}\ \underset{i}{\text{உச்சம்}}\ a_{ij}$-ஐ விளையாட்டின் மேல்மதிப்பு என்கிறோம்

$$\underset{i}{\text{உச்சம்}}\ \underset{j}{\text{நீசம்}}\ a_{ij} = \underset{j}{\text{நீசம்}}\ \underset{i}{\text{உச்சம்}}\ a_{ij} = a_{vk}$$ என்றிருந்தால்

அவ்விளையாட்டில் சேணப்புள்ளி இருப்பதாகவும், P என்ற ஆட்டக்காரரின் மிகச்சிறந்த தந்திரம் v என்றும் Q என்ற ஆட்டக்காரரின் மிகச் சிறந்த தந்திரம் k என்றும் அறிகிறோம்.

உதாரணம்: P, Q என்ற இரு ஆட்டக்காரர்கள் முறையே P_1, P_2, P_3, P_4 என்ற தந்திரங்களையும் Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 என்ற தந்திரங்களையும் பெற்றுள்ளனர். இவர்களின் இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணி பின்வருமாறு.

		ஆட்டக்காரர் Q			
தந்திரங்கள்		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
	P^1	12	2	25	-10
ஆட்டக்காரர்	P^2	16	3	4	10
P	P_3	-2	-1	26	0
	P_4	14	-4	8	6

இவ்வணியிலிருந்து கீழ்மதிப்பையும், மேல்மதிப்பையும் காண்போம். இவ்விளையாட்டு அணியின் கீழ் மதிப்பைக் காண உச்சம் நீசம் a_{ij} ஐக் காணவேண்டும். இதற்கு முதலில்

$i \quad j$

கொடுக்கப்பட்ட அணியின் நிரைகளைக் கருதினல்,

முதல் நிரையின் நீசமூலகம் (Minimum element) = 2

இரண்டாம் நிரையின் நீசமூலகம் = 3

மூன்ரும் நிரையின் நீச மூலகம் = −2

நான்காம் நிரையின் நீச மூலகம் = −4

இந்த நீசமதிப்புகளின் உச்சமதிப்பு =3 ஆகும்.

அதாவது உச்சம் நீசம் (a_{ij}) = 3 ஆகும் → (1

$i \quad j$

இதே போன்று கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டு அணியின்மேல் மதிப்பைக் காண நீசம் உச்சம் (a_{ij}) ஐக் காணவேண்டும். இதற்கு முதலில் கொடுக்கப்பட்ட அணியின் நிரல்களைக் கருதினல்,

முதல் நிரலின் உச்ச மூலகம் (Maximum element) = 16

இரண்டாம் நிரலின் உச்ச மூலகம் = 3

மூன்ரும் நிரலின் உச்ச மூலகம் = 26

நான்காம் நிரலின் உச்ச மூலகம் = 10

இந்த உச்ச மதிப்புகளின் நீச மதிப்பு = 3 ஆகும்.

அதாவது நீசம் உச்சம் (a_{ij}) = 3 ஆகும் → (2)

$j \quad i$

உச்சம் நீசம் a_{ij} = நீசம் உச்சம் (a_{ij}) = என்பதால்

$i \quad j \qquad j \quad i$

கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டில் சேணப்புள்ளி இருப்பதை அறிகிருேம். இங்கு விளையாட்டின் மதிப்பு 3 ஆகும். இது இரண்டாம் நிரைக்கு ஏற்ப இரண்டாம் நிரலில் அமைந்துள்ளது. அதாவது P என்ற ஆட்டக்காரர் P_2 என்ற மிகச் சிறந்த தந்திரத்தையும் Q என்ற ஆட்டக்காரர் Q_2 என்ற மிகச் சிறந்த தந்திரத்தையும் பயன்படுத்துகிருர்கள்.

உதாரணம் : P என்ற ஆட்டக்காரர் P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 என்ற தந்திரங்களையும், Q என்ற ஆட்டக்காரர் Q_1, Q_2, Q_3 என்ற தந்திரங்களையும் பெற்றுள்ளனர். இவ்விரு ஆட்டக்காரர்களின் இழப்பு - ஈட்டிப்பு அணி பின்வருமாறு.

ஆட்டக்காரர் Q

ஆட்டக்காரர் P	தந்திரங்கள்	Q_1	Q_2	Q_3
	P_1	-3	2	4
	P_2	6	1	3
	P_3	3	10	12
	P_4	5	0	-2
	P_5	0	-4	

மேலுள்ள இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியிலிருந்து,

முதல் நிரையின் நீசமதிப்பு $= -3$
இரண்டாம் நிரையின் நீசமதிப்பு $= 1$
மூன்றும் நிரையின் நீசமதிப்பு $= 3$
நான்காம் நிரையின் நீசமதிப்பு $= -2$
ஐந்தாம் நிரையின் நீசமதிப்பு $= -4$
இந் நீசமதிப்புகளின் உச்சமதிப்பு $= 3$ ஆகும்.

அதாவது, விளையாட்டின் கீழ்மதிப்பு = $\underset{i}{\text{உச்சம்}}\ \underset{j}{\text{நீசம்}}\ a_{ij} = 3$ ஆகும்

இதே போன்று,

முதல் நிரலின் உச்சமதிப்பு $= 6$
இரண்டாம் நிரலின் உச்சமதிப்பு 10
மூன்றும் நிரலின் உச்சமதிப்பு $= 12$
இந்த உச்சமதிப்புகளின் நீசமதிப்பு $= 6$ ஆகும்.

அதாவது, விளையாட்டின் மேல்மதிப்பு = $\underset{j}{\text{நீசம்}}\ \underset{i}{\text{உச்சம்}}\ a_{ij} = 6$ ஆகும்.

இங்கு விளையாட்டின் கீழ்மதிப்பு $= 3 \neq$ விளையாட்டின் மேல் மதிப்பு $= 6$ எனவே கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டில் சேணப் புள்ளி நிலைத்திருக்கவில்லை என்று அறிகிறோம். அதனுல் P, Q என்ற ஆட்டக்காரர்கள் தூயதந்திரங்களைப் பயன்படுத்தவில்லை என்றும், கலப்புத் தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர் என்றும் அறிகிறோம்.

இருநபர் பூச்சியக்கூட்டு விளையாட்டு *(சேணப்புள்ளி இல்லாமல்)* (Two person zero-sum game without Saddle point :

ஒரு விளையாட்டில் சேணப்புள்ளி இல்லாமலிருந்தால், ஒரு ஆட்டக்காரர் பயன்படுத்தப்போகும் தந்திரம், மற்றொரு ஆட்டக்காரருக்குத் தெரியாமலிருக்கும். எனவே ஒருவர் பயன் படுத்தும் தந்திரத்தைப் பார்த்து, மற்றொருவர் தன் தந்திரத்தை தனக்கு சாதகமாக விளையாட்டு அமையும்படி பயன்படுத்த முடியாது. இதனால் ஒவ்வொருவரும் தங்களுக்கென்று சுயமான தந்திரங்களை நிகழ்தகவுப் பரவலின் அடிப்படையில் பயன் படுத்துவர்.

இப்பொழுது சேணப்புள்ளியற்ற இந்த இரு நபர் பூச்சியக் கூட்டு விளையாட்டை கணித ரீதியாகக் கருதுவோம். $i = 1, 2, \ldots m$ என்ற m தந்திரங்களை P என்ற ஆட்டக்காரர் x_1 என்ற நிகழ் தகவுடன் பயன்படுத்துவதாகவும், $j = 1, 2, \ldots n$ என்ற n தந்திரங்களை, Q என்ற ஆட்டக்காரர் x_i என்ற நிகழ்தகவுடன் பயன்படுத்துவதாகவும் கொள்வோம்.

இதில் $x_j \geq 0 \ \forall i = 1,2 \ldots m$; $y_i \geq 0 \ \forall j = 1,2 \ldots n$ மேலும்

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 = \sum_{j=1}^{n} y_j \text{ ஆகும்.}$$

$(x_1, x_2, \ldots x_m)$; $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ ஆகியன கலப்புத் தந்திரங் களில் நிகழ்தகவுகளாகும். $(a_{ij})_{m \times n}$ என்பது இவ்விரு நபர் களில் இழப்பு–ஈட்டிப்பு அணி என்றால், P என்ற ஆட்டக்காரர் i என்ற தந்திரத்தை x_i என்ற நிகழ்தகவுடனும், Q என்ற ஆட்டக்காரர் j என்ற தந்திரத்தை y_j என்ற நிகழ்தகவுடனும், பயன்படுத்தினால், எதிர்பார்க்கும் இழப்பு - ஈட்டிப்பு

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} \, y_j \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம்: சேணப்புள்ளியற்ற பின்வரும் விளையாட் டுக்குத் தீர்வு காண்க.

ஆட்டக்காரர் II

$$\text{ஆட்டக்காரர் I} \quad \begin{matrix} & B_1 & B_2 \\ A_1 & -3 & 6 \\ A_2 & 7 & 1 \end{matrix}$$

இதில் முதல் ஆட்டக்காரர் A_1 என்ற தந்திரத்தை x_1 என்ற நிகழ்தகவுடனும், A_2 என்ற தந்திரத்தை x_2 என்ற நிகழ்தக

வுடனும் பயன்படுத்தட்டும். இதனுல் $x_1+x_2 = 1$ $(x_1, x_2 \geq 0)$ ஆகும். இப்பொழுது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் B_1 என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது முதல் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு $f(I,B_1) = -3x_1 + 7x_2$

$$= -3x_1 + 7(1-x_1)$$
$$= 7 - 10x_1$$ ஆகும்.

(ஏனெனில் $x_1+x_2 = 1$)

இப்பொழுது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் B_2 என்ற தந்திரத்தை பயன்படுத்திஞல் முதல் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு

$$f(I, B_2) = 6x_1 + 1x_2$$
$$= 6x_1 + 1 - x_1$$
$$= 1 + 5x_1$$ (ஏனெனில் $x_1+x_2 = 1$)

இதனுல் முதல் ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பை உச்சப்படுத்துவதற்காக இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்திஞலும், x_1, x_2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் தன்னுடைய தந்திரங்களேப் பயன்படுத்துவார். எனவே முதல் ஆட்டக்காரர் தன்னிடமுள்ள தந்திரங்களில் சிறந்த தந்திரங்களேத் தேர்ந்தெடுக்க $f(I, B_1) = f(I, B_2)$ என்றிருக்குமாறு அமைக்கவேண்டும். அதாவது,

$$7 - 10x_1 = 1 + 5x_1$$
$$\Rightarrow 15x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = -\tfrac{2}{5}$$
$$\therefore x_2 = 1 - x_1 = 1-\tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5}$$

எனவே முதல் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு

$$= -3\left(\tfrac{2}{5}\right) + 7\left(\tfrac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{-6+21}{5}$$
$$= 3$$ ஆகும்.

இவ்வாருக, முதல் ஆட்டக்காரர் A_1 என்ற தந்திரத்தை $\tfrac{2}{5}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், A_2 என்ற தந்திரத்தை $\tfrac{3}{5}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும் பயன்படுத்துவார். இவருடைய எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு ரூ. 3/= ஆகும். இதனுல் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எந்த நிகழ்தகவுப் பரவலேப் பயன்படுத்தி B_1, B_2 என்ற தந்திரங்களேப் பயன்படுத்திஞலும் முதல் ஆட்டக்காரரின் ஈட்டிப்பு ரூ. 3/- ஆகும்.

இதே போன்று, இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் B_1, B_2 என்ற தன்னுடைய தந்திரங்களே முறையே y_1, y_2 என்ற நிகழ்தகவு

களுடன் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். இதில்

$y_1+y_2 = 1, \quad y_1, y_2 \geq 0$ ஆகும்.

முதல் ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் A_1 என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினல் இரண்டாம் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு $g(II, A_1) = -3y_1+6y_2$

$= -3y_1 + 6(1-y_1)$

$= 6 - 9y_1$ ஆகும் (ஏனெனில் $y_1+y_2 = 1$ ஆகும்)

இப்பொழுது முதல் ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் A_2 என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினல் இரண்டாம் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு $g(II, A_1) = 7y_1 + y_2$

$= 7y_1 + (1-y_1)$

$= 1+6y_1$ ஆகும்.

(ஏனெனில் $y_1+y_2 = 1$ ஆகும்)

இதனல் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய எதிர்பார்க்கும் இழப்பை நீசப்படுத்துவதற்காக, முதல் ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினலும், y_1, y_2 என்ற நிகழ்தகவு களுடன் தன்னுடைய தந்திரங்களைப் பயன்படுத்துவார். எனவே இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் தன்னிடமுள்ள தந்திரங் களில் சிறந்த தந்திரங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க $g(II, A_1) = g(II, A_2)$ என்றிருக்குமாறு அமைக்கவேண்டும். அதாவது,

$6 - 9y_1 = 1+6y_1$

$\Rightarrow \quad 15y_1 = 5 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}$

$\therefore y_2 = 1-y_1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

எனவே இரண்டாம் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு

$= -3(\frac{1}{3})+6(\frac{2}{3})$

$= \dfrac{-3+12}{3}$

$= \frac{9}{3} = 3$ ஆகும்.

இவ்வாருக, இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் B_1 என்ற தந்திரத்தை $\frac{1}{3}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், B_2 என்ற தந்திரத்தை $\frac{2}{3}$ என்ற நிகழ் தகவுடனும் பயன்படுத்துவார். இவருடைய எதிர்பார்க்கும் இழப்பு ரூ. 3/– ஆகும். இதனல் முதல் ஆட்டக்காரர் எந்த நிகழ் தகவுப் பரவலைப் பயன்படுத்தி A_1, A_2 என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தினலும் இரண்டாம் ஆட்டக்காரரின் இழப்பு ரூ. 3/- ஆகும்.

மாதிரி : சேணப்புள்ளியில்லாத கீழ்க்காணும் விளையாட்டுத் தீர்வு காண்க.

		ஆட்டக்காரர் Q	
		L	M
ஆட்டக்காரர் P	S	**7**	**−6**
	T	**5**	8

இதில் P என்ற ஆட்டக்காரர் S என்ற தந்திரத்தை x_1 என்ற நிகழ்தகவுடனும், T என்ற தந்திரத்தை x_2 என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடட்டும். இதனால் $x_1+x_2=1$ $(x_1, x_2 \geq 0)$ ஆகும். இப்பொழுது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் L என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது, முதல் ஆட்டக்காரரான P ன் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு $f(P, L) = 7x_1+5x_2$

$$= 7x_1 + 5(1-x_1)$$
$$= 5+2x_1$$
(ஏனெனில் $x_1 + x_2 = 1$)

இப்பொழுது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் Q, எப்பொழுதும் M என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் முதல் ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு

$$f(P,M) = -6x_1 + 8x_2$$
$$= -6x_1 + 8(1-x_1)$$
$$= 8 - 14x_1$$ (ஏனெனில் $x_1+x_2 = 1$)

இதனால் முதல் ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பை உச்சப்படுத்துவதற்காக, Q என்ற ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினாலும், x_1, x_2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் தன்னுடைய தந்திரங்களைப் பயன்படுத்துவார். எனவே P என்ற ஆட்டக்காரர் தன்னிடமுள்ள தந்திரங்களில் சிறந்த தந்திரங்களை தேர்ந்தெடுக்க $f(P, L) = f(P, M)$ என்றிருக்குமாறு அமைக்கவேண்டும்.

அதாவது,

$$5+2x_1 = 8 - 14x_1 \Rightarrow 16x_1 = 3$$
$$\therefore x_1 = \tfrac{3}{16}$$
$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

எனவே P என்ற ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு

$$7x_1+5x_2 = 7\left(\frac{3}{16}\right)+5\left(\frac{13}{16}\right) = \frac{21+65}{16} = \frac{86}{16}$$ ஆகும்.

இவ்வாருக P என்ற ஆட்டக்காரர் S என்ற தந்திரத்தை $\frac{3}{16}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், T என்ற தந்திரத்தை $\frac{13}{16}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும் பயன்படுத்துவார். இவருடைய எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு ரூ. $\frac{86}{16}$ ஆகும். இதனுல் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எந்த நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பயன்படுத்தி L, M என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தினுலும் P என்ற ஆட்டக்காரரின் ஈட்டிப்பு ரூ. $\frac{86}{16}$ ஆகும்.

இதேபோன்று Q என்ற ஆட்டக்காரர் L, M என்ற தன்னுடைய தந்திரங்களை முறையே y_1, y_2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். இதில் $y_1+y_2=1$ $y_1, y_2 \geq 0$ ஆகும்.

P என்ற ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் S என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினுல், Q என்ற ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு $g(Q, S) = 7y_1-6y_2$

$$= 7y_1-6(1-y_1) = 13y_1-6$$ ஆகும்.

(ஏனெனில் $y_1+y_2=1$ ஆகும்)

இப்பொழுது P என்ற ஆட்டக்காரர் எப்பொழுதும் T என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினுல், Q என்ற ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு $g(Q, T) = 5y_1+8y_2 = 5y_1+8(1-y_1) = 8-3y_1$ (ஏனெனில் $y_1+y_2=1$ ஆகும்.)

இதனுல் Q என்ற ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய எதிர்பார்க்கும் இழப்பை நீசப்படுத்துவதற்கு, P என்ற ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினுலும் y_1, y_2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் தன்னுடைய தந்திரங்களைப் பயன்படுத்துவார். எனவே Q என்ற ஆட்டக்காரர் தன்னிடமுள்ள தந்திரங்களில் சிறந்த தந்திரங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க $g(Q, S) = g(Q, T)$ என்றிருக்குமாறு அமைக்கவேண்டும்.

அதாவது $13y_1-6 = 8-3y_1$

$$\Rightarrow 16y_1 = 14 \Rightarrow y_1 = \frac{14}{16}$$

$$\therefore \; y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{14}{16} = \frac{}{16}$$ ஆகும்.

எனவே Q என்ற ஆட்டக்காரரின் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு

$$= 7y_1 - 6y_2$$

$$= 7\left(\frac{14}{16}\right) - 6\left(\frac{2}{16}\right)$$

$$= \frac{98 - 12}{16} = \frac{86}{16}$$ ஆகும்.

இவ்வாறாக Q என்ற ஆட்டக்காரர் L என்ற தந்திரத்தை $\frac{14}{16}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், M என்ற தந்திரத்தை $\frac{1}{8}$ என்ற நிகழ் தகவுடனும் பயன்படுத்துவார். இவருடைய எதிர்பார்க்கும் இழப்பு ரூ. $\frac{86}{16}$ ஆகும். இதனால் P என்ற ஆட்டக்காரர் எந்த நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பயன்படுத்தி S, T என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தினாலும் Q என்ற ஆட்டக்காரரின் இழப்பு ரூ. $\frac{6}{16}$ ஆகும்.

சேணப்புள்ளியற்ற விளையாட்டுக்குத் தீர்வுகாண ஒரு பொதுமுறை :

முதல் விளையாட்டுக்காரர் $i = 1, 2 \ldots\ldots m$ என்ற தந்திரங்களையும், இரண்டாம் விளையாட்டுக்காரர் $j = 1, 2 \ldots n$ என்ற தந்திரங்களையும் பயன்படுத்தினால் அமையக்கூடிய இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணி $(a_{ij})_{m \times n}$ என்க.

அதாவது,

ஆட்டக்காரர் II

		1	2	3	……	n
	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	……	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	……	a_{2n}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	……	a_{3n}
ஆட்டக்காரர் I	.	.	.	.	……	.
	.	.	.	.	……	.
	.	.	.	.	……	.
	.	.	.	.	……	.
	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	……	a_{mn}

மேலுள்ள இழப்பு - ஈட்டிப்பு அணியில் சேணப்புள்ளி இல்லை என்பதாகக் கொண்டால், கீழ்க்காணும் வழிமுறைகளைப் பின்பற்ற வேண்டியுள்ளது.

(i) ஒவ்வொரு விளையாட்டிற்கும் விளையாட்டின் மதிப்பு g என்று ஒன்று அமைந்திருக்கும். இது ஒப்பற்றதாக (unique) இருக்கும்.

(ii) முதல் ஆட்டக்காரர் $x_1, x_2, \ldots x_m$ $(x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots m$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1)$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் தன்னுடைய 1, 2...m என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்துவார்.

(iii) இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் $y_1, y_2 \ldots y_n$ $(y_j \geq 0 \forall j = 1, 2 \ldots n)$ $\sum_{j=1}^{n} (y_j = 1)$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் தன்னுடைய 1,2...n என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்துவார். இப்பொழுது $x_1, x_2 \ldots x_m;$ $y_1, y_2 \ldots y_n$, g என்ற தெரியாதவைகளை கீழ்க்கண்ட தொடர்புகளிலிருந்து பெறுகிறோம்.

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m = 1, \; x_1, \ldots x_2 \, x_m \geq 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n + = 1, \; y_1, y_2 \ldots y_n \geq 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots\ldots + x_m a_{m1} \geq g \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots\ldots + x_m a_{m2} \geq g \\ \;\;,, \qquad ,, \qquad\qquad ,, \\ \;\;,, \qquad ,, \qquad\qquad ,, \\ \;\;,, \qquad ,, \qquad\qquad ,, \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots\ldots + x_m a_{mn} \geq g \end{array}\right\} \rightarrow (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 a_{i1} + y_2 a_{12} + \ldots\ldots + y_n a_{1n} \leq g \\ y_1 a_{21} + y_2 a_{22} + \ldots\ldots + y_n a_{2n} \leq g \\ \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \\ y_2 a_{m1} + y_1 a_{m2} + \ldots\ldots\ldots + y_n a_{mn} \leq g \end{array}\right\} \rightarrow (4)$$

மேலுள்ள தொடர்புகளில் m+n+1 தெரியாதவைகளும் m+n+2 தொடர்புகளும் உள்ளன. இத் தொடர்புகளிலிருந்து $x_1, x_2 \ldots x_m;$ $y_1, y_2 \ldots y_n$, g ஆகியவைகளைக் காண கீழ்க்காணும் முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

(i) இயற்கணித முறை ((Algebraic Method)

(ii) அணிக் கொள்கை முறை (Matrix Theory Method)

(iii) வரைபட முறை (Graphical Method)
(iv) ஒரு படித்த முறை (Linear Programming Method)
(v) தோராய தீர்வு காணும் முறை (Method of Approximate Solution)

இயற்கணித முறை (Algebraic Method)

இம் முறையை ஒரு உதாரணத்தின் மூலம் காண்போம்.

ஆட்டக்காரர் B

		S	T
ஆட்டக்காரர் A	P	−3	7
	Q	6	1

g என்பது விளையாட்டின் மதிப்பு என்க. A என்ற ஆட்டக்காரர் P என்ற தந்திரத்தை x_i என்ற நிகழ்தகவுடனும், Q என்ற தந்திரத்தை x_2 என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடட்டும். இதில் $x_i+x_2=1$; $x_1, x_2 \geq 0$ ஆகும். B என்ற ஆட்டக்காரர் S என்ற தந்திரத்தை y_1 என்ற நிகழ்தகவுடனும், T என்ற தந்திரத்தை y_2 என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடட்டும். இதில் $y_1 + y_2 = 1$; $y_1, y_2 \geq 0$ ஆகும்.

இப்பொழுது A என்ற ஆட்டக்காரர் g என்ற நீசமான ஈட்டிப்பைப் பெற முயற்சிக்கும்பொழுது B என்ற ஆட்டக்காரர் அதிகப்பட்சமாக g ஐ ஆட்டக்காரர் Aயுடன் இழப்பார். இதனுல் கீழ்க்கண்ட தொடர்புகள் அமைகின்றன.

$x_1+x_2 = 1 \quad (x_1, x_2 \geq 0)$ — (1)
$y_1+y_2 = 1 \quad (y_1, y_2 \geq 0)$ — (2)
$x_1(-3) + x_2(6) \geq g$ — (3)
$x_1(7) + x_2(1) \geq g$ — (4)
$y_1(-3) + y_2(7) \leq g$ — (5)
$y_1(6) + y_2(1) \leq g$ — (6)

இயற்கணித முறையைப் பயன்படுத்த (3) லிருந்து (6) வரை அமைந்துள்ள சமனிலிகளைச் சமன்பாடுகளாகக் கருதி ஆறு சமன்பாடுகளில் ஐந்து சமன்பாடுகளை மட்டும் கருதி ஐந்து தெரியாதவைகளான x_1, x_2, y_1, y_2, g ஆகியவைகளைக் கண்டு 6 ஆம் சமன்பாடு பூர்த்தி செய்யப்படுகிறதா என்று சரி பார்க்கிறோம். மேலும் $x_1, x_2 \geq 0$ $y_1, y_2 \geq 0$ என்று அமைந்துள்ளதா என்றும் காண்கிறோம்.

இவ்வாறாக இப்பொழுது கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை அமைக்கிறோம்.

$x_1 + x_2 = 1$ — (7)

$y_1 + y_2 = 1$ — (8)

$-3x_1 + 6x_2 = g$ — (9)

$7x_1 + x_2 = g$ — (10)

$-3y_1 + 7y_2 = g$ — (11)

$6y_1 + y_2 = g$ — (12)

(7),(8) ஆகியவைகளிலிருந்து $x_2 = 1 - x_1$ → (13)

$y_2 = 1 - y_1$ → (14)

இவைகளை (9), (10) ஆகியவைகளில் பிரதியீடு செய்தால்

$-3x_1 + 6(1 - x_1) = g$ → (15)

$7x_1 + (1 - x_1) = g$ → (16)

(15), (16) ஆகியவைகளிலிருந்து

$-3x_1 + 6(1 - x_1) = 7x_1 + (1 - x_1)$

அதாவது $x_1 = \frac{1}{3}$ → (17)

(13) லிருந்து $x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ → (18)

இவைகளை (9) அல்லது (10)ல் பிரதியீடு செய்தால்

$g = 3$ என்று கிடைக்கிறது. → (19)

(11) ல் $y_2 = 1 - y_1$ என்றும் $g = 3$ என்றும் பிரதியீடு செய்தால்

$-3y_1 + 7(1 - y_1) = 3$

அதாவது $y_1 = \frac{2}{5}$ → (20)

எனவே $y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ → (21)

இப்பொழுது $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, y_1 = \frac{2}{5}, y_2 = \frac{3}{5} \geq 0$.

மேலும் (12) லுள்ள சமன்பாடு $y_1 = \frac{2}{5}, y_1 = \frac{3}{5}$

$g = 3$ ஆகியவைகளுக்கு பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது.

எனவே A என்ற ஆட்டக்காரர் P என்ற தந்திரத்தை $\frac{1}{3}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், Q என்ற தந்திரத்தை $\frac{2}{3}$ என்ற நிகழ் தகவுடனும், B என்ற ஆட்டக்காரர் S என்ற தந்திரத்தை $\frac{2}{5}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், T என்ற தந்திரத்தை $\frac{3}{5}$ என்ற நிகழ்தக வுடனும் விளையாடுவார்கள். விளையாட்டின் மதிப்பு ரூ. 3 ஆகும்.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் சேணப்புள்ளியற்ற விளையாட்டு அணிக்கு இயற்கணித முறை மூலம் தீர்வு காண்க.

		ஆட்டக்காரர் II	
		1	2
ஆட்டக்காரர் I	1	8	1
	2	4	6

முதல் ஆட்டக்காரர் 1, 2 ஆகிய தந்திரங்களை முறையே x_1, x_2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் 1, 2 என்ற தன்னுடைய தந்திரங்களை y_1, y_2 என்ற நிகழ்தகவு களுடனும் விளையாடட்டும். இதில் $x_1+x_2=1$; $y_1+y_2=1$; $x_1, x_2, y_1\ y_2 \geq 0$ ஆகும். g என்பது விளையாட்டின் மதிப்பு என்றால்,

$$x_1 + x_2 = 1;\quad (x_1, x_2 \geq 0) \quad \rightarrow (1)$$
$$y_1 + y_2 = 1;\quad (y_1, y_2 \geq 0) \quad \rightarrow (2)$$
$$8x_1 + 4x_2 \geq g \quad - (3)$$
$$x_1 + 6x_2 \geq g \quad - (4)$$
$$8y_1 + y_2 \leq g \quad - (5)$$
$$4y_1 + 6y_2 \leq g \quad - (6)$$

சமனிலிகளை சமன்பாடுகளாகக் கருதினால்,

$$8x_1 + 4x_2 = g \quad - (7)$$
$$x_1 + 6x_2 = g \quad - (8)$$
$$8y_1 + y_2 = g \quad - (9)$$
$$4y_1 + 6y_2 = g \quad - (10)$$

(1), (2) ஆகியவைகளிலிருந்து $x_2 = 1 - x_1$ என்றும், $y_2 = 1 - y_1$ என்றும் பிரதியீடு செய்தால் (7), (8), (9), (10) ஆகியவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

$$8x_1 + 4(1-x_1) = g \quad - (11)$$
$$x_1 + 6(1-x_1) = g \quad - (12)$$
$$8y_1 + 1 - y_1 = g \quad - (13)$$
$$4y_1 + 6(1-y_1) = g \quad - (14)$$

(11), (2) ஆகியவைகளிலிருந்து

$$8x_1 + 4(1-x_1) = x_1 + 6(1-x_1)$$
$$4x_1 + 4 = 6 - 5x_1$$
$$\Rightarrow 9x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{9}$$

$$\because x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

எனவே (7) ல் $x_1 = 2/9$, $x_2 = 7/9$ எனப் பிரதியீடு செய்தால்,

$$8\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(7/9\right) = g$$

$$\therefore g = \frac{44}{9}$$

இப்பொழுது $g = \frac{44}{9}$ என்று (13) ல் பிரதியீடு செய்தால்,

$$8y_1 + 1 - y_1 = \frac{44}{9}$$

$$\Rightarrow 7y_1 = \frac{44}{9} - 1$$

$$7y_1 = \frac{35}{9}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{35}{63} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

இப்பொழுது $y_1 = \frac{5}{9}$ என்று (14)ல் பிரதியீடு செய்தால்

$4\left(\frac{5}{9}\right) + 6\left(1 - \frac{5}{9}\right) = g$ ஆகும்.

அதாவது $\frac{20 + 24}{9} = \frac{44}{9} = g$ எனவே சமன்பாடு (14) பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது என்பதால் விளையாட்டின் தீர்வுகள் சரியானதே என்று கொள்கிறோம். மேலும் $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$ என்று அமைந்துள்ளது.

இவ்வாறாக முதல் ஆட்டக்காரர் 1, 2 என்ற தந்திரங்களை முறையே $x_1 = \frac{2}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் 1, 2 என்ற தன்னுடைய தந்திரங்களை $y_1 = \frac{5}{9}$, $y_2 = \frac{4}{9}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடுவார்கள். விளையாட்டின் மதிப்பு $\frac{44}{9}$ ஆகும்.

குறிப்பு: மேலுள்ள விளையாட்டு அணியின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் (element) k என்ற எண்ணோடு கூட்டினால்

அதாவது $G_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றுடனும் K ஐக் கூட்டினால்

$G_2 = \begin{pmatrix} 8+K & 1+K \\ 4+K & 6+K \end{pmatrix}$ என்று அமையும்.

G_1 என்ற விளையாட்டு அணியின் தீர்வு $x_1 = \frac{2}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$, $y_1 = \frac{5}{9}$, $y_2 = \frac{7}{9}$, $g = \frac{44}{9}$ என்று கண்டோம். இப்பொழுது

G_2 என்ற மேலுள்ள விளையாட்டு அணியின் தீர்வுகளும் G_1ன் தீர்வுகளும் சமமானவை. ஆனால் G_2ன் மதிப்பு $= g + K$ ஆகும். அதாவது G_2ன் மதிப்பு $= \frac{44}{9} + K$ ஆகும். தெளிவாக, G_2ன் தீர்வுகள் பின்வருமாறு: $x_1 = \frac{2}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$, $y_1 = \frac{5}{9}$, $y_2 = \frac{7}{9}$, $g_1 = \frac{44}{9} + K$ ஆகும்.

அணிமுறை (Matrix Method):

இரண்டாம் ஆட்டக்காரர்

$$A = \text{முதல் ஆட்டக்காரர்} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டு அணி என்க. இதில் முதல் ஆட்டக்காரர் $i = 1, 2 \ldots m$ என்ற தந்திரங்களையும் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் $j = 1, 2 \ldots n$ என்ற தந்திரங்களையும் பயன் படுத்தி விளையாடுகின்றனர். இப்பொழுது $B = (b_{ij})$ என்பது A அணியின் கீழ் அணியாகும். Bன் தரம் (order) $r \geq 2$ என்று அமைந்திருக்கும். இப்பொழுது $J_r = (1, 1, \ldots\ldots 1)$ என்ற $1 \times r$ தரத்தைப் பெற்ற நிரை வெக்டர் (new vector) ஐக் கருதுக. B^T என்பது B அணியின் திருப்பு அணி என்றால்

$$X = (x_1, x_2 \ldots x_m) = \frac{r \left(\text{adj}\, B\right)}{J_r \left(\text{adj}\, B\right) J_r^T}$$

$$Y = (y_1, y_2 \ldots y_n = \frac{J_r \left(\text{adj}\, B\right)^T}{J_r \left(\text{adj}\, B\right) J_r^T}$$ என்பன

கொடுக்கப்பட்ட A அணியின் தீர்வுகளாகும்.

$$g = \frac{|B|}{J_r (\text{adj}\, B) J_r^T}$$ என்பது A அணியின் விளையாட்டு மதிப்பாகும். $|B|$ என்பது B அணியின் அணிக்கோவை (determinant) மதிப்பாகும். காணப்படும் தீர்வுகளான $x_1, x_2 \ldots x_m$; $y_1, y_2 \cdots y_n$, ஆகியன ≥ 0 என்றிருத்தல் அவசியம். கருதப்படும் முதல் கீழ் அணியான B_1 என்பது கீழ்க்காணும் விதிகளைப் பின்

பற்றி அமையவில்லை என்றால் B_1 என்ற கீழ் அணியைப் புறக் கணித்துவிட்டு, வேறொரு கீழ் அணியைக் கருதி தீர்வுகளைக் காண முயற்சிக்கிறோம். எந்த ஒரு கீழ் அணி இவ்விதிகளைப் பின்பற்றி அமைகிறதோ, அந்த தீர்வுகள் தான் கொடுக்கப் பட்ட விளையாட்டு அணியான Aன் தீர்வுகளாகும்.

விதிகள் : (i) $x_i \geq 0,\ y_j \geq 0\ \ i = 1, 2 \ldots m\ ;\ j = 1, 2 \ldots n$

$$\text{(ii)}\ \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq g\ \forall\ j = 1, 2 \ldots n$$

$$\text{(iii)}\ \sum_{1=j}^{n} y_j a_{ij} \leq g\ \forall\ i = 1, 2 \ldots m$$

மாதிரி : கீழ்க்காணும் விளையாட்டு அணிக்கு, அணிமுறை மூலம் தீர்வு காண்க.

ஆட்டக்காரர் B

$$\text{ஆட்டக்காரர் A}\quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A என்ற ஆட்டக்காரர் P_1, P_2 என்ற தந்திரங்களை x_1, x_2 என்ற நிகழ்தகவுடன் விளையாடட்டும். இதில் $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 1$ ஆகும். B என்ற ஆட்டக்காரர் P_3, P_4, P_5 என்ற தன்னுடைய தந்திரங்களை y_1, y_2, y_3 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் விளையாடட்டும். இதில் $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ஆகும். $y_1\ y_2, y_3 \geq 0$

g என்பது கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டு அணியின் மதிப்பு என்றால்,

$x_1 + x_2 = 1\ ;\ x_1, x_2 \geq 0$ — (1)

$y_1 + y_2 + y_3 = 1\ ;\ y_1, y_2, y_3 \geq 0$ — (2)

$2x_1 - 3x_2 \geq g$ — (3)

$-2x_1 + 5x_2 \geq g$ — (4)

$3x_1 - x_2 \geq g$ — (5)

$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq g$ — (6)

$-3y_1 + 5y_2 - y_3 \leq g$ — (7)

கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டு அணியிலிருந்து பெறப்படும் முடியுமான கீழ் அணிகள் பின்வருமாறு:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ஆகும்.

B_1 ஐக் கருதுவதால், $y_1 = 0$ என்பது தெளிவாகிறது.
B_2 ஐக் கருதுவதால், $y_2 = 0$ என்பது தெளிவாகிறது.
B_3 ஐக் கருதுவதால், $y_3 = 0$ என்பது தெளிவாகிறது.

இப்பொழுது $B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ ஐக் கருதினல்

$$\text{adj } B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } B_1{}^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{(1, 1)\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{J_2\ (\text{adj } B_1)}{J_2\ (\text{adj } B_1)\ J_2{}^T} = \frac{(-6,\ -5)}{-11} = \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right)$$

$$Y = \frac{J_2\ (\text{adj } B_1)^T}{J_2\ (\text{adj } B_1)\ J_2{}^T}$$

$$Y = \frac{(1, 1)\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{-11}$$

$$= \frac{(-4,\ -7)}{-11}$$

$$= \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$$

அதாவது $Y = \left(0, \frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$; (ஏனெனில் $y_1 = 0$ ஆகும்)

கண்ட தீர்வுகள் ≥ 0 என்று உள்ளது.

$$g = \frac{|B|}{J_2\,(\text{adj } B_1)\,J_2^{\,T}} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{13}{11}$$

$$x_1 = \frac{6}{11},\quad x_2 = \frac{5}{11},\quad y_1 = 0,\quad y_2 = \frac{\;}{11},\quad y_3 = \frac{7}{11}$$

ஆகியவைகளுக்கு தொடர்பு (3) பூர்த்தி செய்யப் படவில்லை. எனவே மேல்கண்ட தீர்வுகள் சரியான தீர்வுகள் இல்லை என்று முடிவு கொண்டு வேறொரு கீழ் அணியான B_2 ஐக் கருதுகிறோம்.

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\ (\text{adj } B_2)^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

$$\therefore X = \frac{J_2\,(\text{adj } B_2}{J_2\,(\text{adj } B_2)\,J_2^T} = \frac{(1,1)\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{(1,1)\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(2,\ -1)}{1}$$

$$= (2, -1)$$

இதில் $x_1 = 2,\ x_2 = -1 \ngtr 0$ என்பதால் B_2 என்ற இந்த அணியைப் புறக்கணித்துவிட்டு, மற்றொரு அணியான B_3 ஐக் கருதுகிறோம்.

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\ \left(\text{adj } B_3\right)^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{J_3\ (\text{adj } B_3)}{J_3\ (\text{adj } B_3)\ J_3^{\,T}} = \frac{(1,1)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{(1,1)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(8,4)}{12}$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\ x_1 = 2/3,\ x_2 = \frac{1}{3}$$

$$Y = \frac{J_3\ (\text{adj}\ B_3)^T}{J_3\ (\text{adj}\ B_3)\ J_3^T}$$

$$= \frac{(1, 1)\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(7, 5)}{12} = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

$$\therefore\ y_1 = \frac{7}{2},\ y_2 = 5/12,\ y_3 = 0$$

இங்கு $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$ என்றுள்ளது. மேலும்

$$g = \frac{|B_3|}{J_3\ (\text{adj}\ B_3) J_3^T} = \frac{\begin{vmatrix}2 & -2\\ -3 & 5\end{vmatrix}}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

இதைத் தவிர (1) லிருந்து (7) வரையுள்ள தொடர்புகளெல்லாம் இம் மதிப்புகளுக்குப் பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது. எனவே மேற்கண்ட தீர்வுகள் சரியானதே என்று முடிவுசெய்கிறோம். இவ்வாறாக A என்ற ஆட்டக்காரர் P_1, P_2 என்ற தந்திரங்களை $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், B என்ற ஆட்டக்காரர் P_3, P_4, P_5 என்ற தந்திரங்களை $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}, 0\right)$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் விளையாடுகின்றனர் என்றும், விளையாட்டின் மதிப்பு $g = \frac{1}{3}$ என்றும் அறிகிறோம்.

(2×2) தரத்தைப் பெற்ற விளையாட்டு அணிக்கு, அணிக் கொள்கை மூலம் தீர்வுகள் :

$$A = X \overset{Y}{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}$$ என்பது இழப்பு - ஈட்டிப்பு அணி

என்றால். X ன் உச்ச தந்திரங்கள் $(p_1, p_2) = \dfrac{(1, 1)\ (\text{adj } A)}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

Y ன் உச்ச தந்திரங்கள் $(q_1, q_2) = \dfrac{(1, 1)\ (\text{adj } A)^T}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

விளையாட்டின் மதிப்பு $g = \dfrac{|A|}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

மாதிரி: $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ என்றால் $(p_1, p_2) = \dfrac{(1, 1)\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

$$= \frac{(2, 2)}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore (p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

எனவே முதல் ஆட்டக்காரர் 1, 2 என்ற தந்திரங்களை $p_1 = \frac{1}{2}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும் $p_2 = \frac{1}{2}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடுவார்.

இப்பொழுது $(q_1, q_2) = \dfrac{(1, 1)\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

$$= \frac{(2, 2)}{4} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right)$$

$$g = \frac{|A|}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\ \binom{1}{1}}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

குறிப்பு:

வேறுவிதமாகவும் g ஐக் காணலாம். அதாவது

$$g = (p_1, p_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow g = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி : $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ என்றால்

$$(p_1, p_2) = \frac{(1,1)\,(\text{adj } A)}{(1,1)\,(\text{adj } A)\,\binom{1}{1}}$$

$$= \frac{(1,1)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{(1,1)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}} = \frac{(-2, -1)}{-3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(q_1, q_2) = \frac{(1,1)\,(\text{adj } A)^T}{(1,1)\,(\text{adj } A)\,\binom{1}{1}} = \frac{(1,1)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{(1,1)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(-2, -1)}{-3}$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$g = \frac{|A|}{(1,1)\,(\text{adj } A)\,\binom{1}{1}}$$

$$= \frac{2}{-3} = -2/3$$

வேறுவிதமாக $g = (p_1, p_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/3\\ 1/3\end{pmatrix}$$

$$= -2/3 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி : $A = \begin{pmatrix}7 & -6\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ என்றால்

$$(p_1, p_2) = \frac{(1,1)\,(\text{adj } A)}{(1,1)\,(\text{adj } A)\,\binom{1}{1}}$$

$$= \frac{(1, 1)\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(3, 13)}{16} = \left(\frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right)$$

$$(q_1, q_2) = \frac{(1, 1)\ (\text{adj } A)^T}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\ \binom{1}{1}}$$

$$= \frac{(1, 1)\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(14, 2)}{16} = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$g = \frac{|A|}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\ \binom{1}{1}} = \frac{86}{16} = \frac{43}{8} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி: $A = \begin{pmatrix} 10 & -30 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$ என்றால்,

$$(p_1, p_2) = \frac{(1, 1)\ (\text{adj } A)}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\ \binom{1}{1}}$$

$$= \frac{(1, 1)\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(30, 40)}{70} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

$$(q_1, q_2) = \frac{(1, 1)\ (\text{adj } A)^T}{(1, 1)\ (\text{adj } A)\ \binom{1}{1}} = \frac{(1, 1)\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}}{(1, 1)\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(50, 20)}{70} = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right) \text{ ஆகும்.}$$

$$g = \frac{|A|}{(1,1)\ (\text{adj} A)\ \binom{1}{1}}$$

$$= \frac{-100}{70} = \frac{-10}{7} \text{ ஆகும்.}$$

வரைபட முறை (Graphical Procedure):

வரைபட முறையின் மூலம் ஒரு விளையாட்டு அணிக்குத் தீர்வு காணும் முறையை ஒரு உதாரணம் மூலம் காண்போம்.

ஆட்டக்காரர் B

$$\text{ஆட்டக்காரர் A} \quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

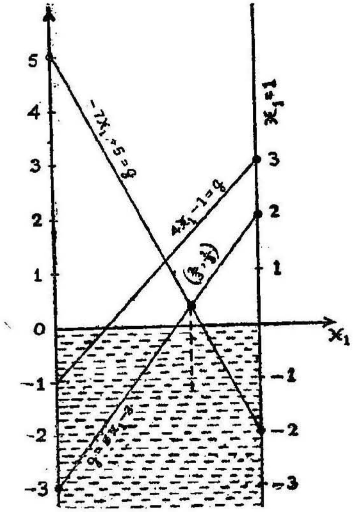
g என்பது விளையாட்டின் மதிப்பு என்றால்,

$$x_1 + x_2 = 1 \;;\; x_1, x_2 \geq 0 \qquad — \qquad (1)$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \;;\; y_1, y_2, y_3 \geq 0 \qquad — \qquad (2)$$
$$2x_1 - 3x_2 \geq g \qquad — \qquad (3)$$
$$-2x_1 - 5x_2 \geq g \qquad — \qquad (4)$$
$$3x_1 - x_2 \geq g \qquad — \qquad (5)$$
$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq g \qquad — \qquad (6)$$
$$-3y_1 + 5y_2 - y_3 \leq g \qquad — \qquad (7)$$

இதில் x_1, x_2 என்பவைகள், A என்ற ஆட்டக்காரர் P_1, P_2 என்ற தந்திரங்களை முறையே தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளாகும். இதேபோன்று y_1, y_2, y_3 என்பவைகள், B என்ற ஆட்டக்காரர் P_3, P_4, P_5 என்ற தந்திரங்களை முறையே தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளாகும். (1) ஐப் பயன் படுத்தி (3), (4), (5) ஆகியவைகளை மாற்றி எழுதினால்,

$$2x_1 - 3(1 - x_1) \geq g \text{ அல்லது } 5x_1 - 3 \geq g \qquad — \qquad (8)$$
$$-2x_1 + 5(1 - x_1) \geq g \text{ அல்லது } -7x_1 + 5 \geq g \qquad — \qquad (9)$$
$$3x_1 - (1 - x_1) \geq g \text{ அல்லது } 4x_1 - 1 \geq g \qquad — \qquad (10)$$

என்று பெறுகிறோம். இப்பொழுது $g = 5x_1 - 3$, $-7x_1 + 5 = g$, $4x_1 - 1 = g$ என்ற கோடுகளை வரைபடம் மூலம் வரைந்தால் கீழ்க் கண்ட வரைபடத்தைப் பெறுகிறோம். x_1, x_2 என்பவைகள் நிகழ்தகவுகள் என்பதால் அவைகள் [0, 1] என்ற இடைவெளி யில் அமைதல் வேண்டும். எனவே [0, 1] என்ற இடைவெளிக்கு இடையே இக் கோடுகளை வரைகிறோம்.



இதில் g உச்சமாக இருக்குமாறு அமைந்துள்ள புள்ளி $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ஆகும். எனவே $g = 5x_1 - 3$, $g = 5 - 7x_1$

$$= 5(2/3) - 3$$

$$= \frac{1}{3}$$

(5) லிருந்து $3x_1 - x_2 = 3(2/3) - 1/3 = \frac{5}{3} > \frac{1}{3} = g$

அல்லது $3x_1 - x_2 > g$. எனவே $y_3 = 0$

பிறகு (2), (6) ஆகியவைகளிலிருந்து

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_2 = 1 - y_1$$

i. e., $2y_1 - 2(1 - y_1) = 1/3$

$$4y_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

அலல்து $y_1 = \frac{7}{12}$, $y_2 = \frac{5}{12}$

இவ்வாருக $x_1 = \frac{2}{3}$, $y_1 = \frac{7}{12}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{5}{12}$

$y_3 = 0$, $g = \frac{1}{3}$ என்று தீர்வு காண்கிறோம்.

மாதிரி : $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற விளையாட்டு அணிக்கு வரைபட முறை மூலம் தீர்வு காண்க.

$$x_1 + x_2 = 1 \; ; \; x_1, x_2 \geq 0 \qquad — \qquad (1)$$

$$y_1 + y_2 = 1 \; ; \; y_1, y_2 \geq 0 \qquad — \qquad (2)$$

$$-3x_1 + 6x_2 \geq g \qquad — \qquad (3)$$

$$6x_1 + 3x_2 \geq g \qquad — \qquad (4)$$

$$-3y_1 + 6y_2 \leq g \qquad — \qquad (5)$$

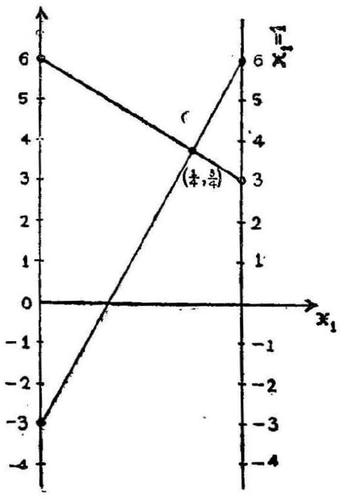
$$6y_1 + 3y_2 \leq g \qquad — \qquad (6)$$

(3), (4) ஆகிய சமனிலிகளை (1) ஐப் பயன்படுத்தி எழுதினல்

$$-3x_1 + 6(1 - x_1) \geq g \text{ i.e., } -9x_1 + 6 \geq g \qquad \rightarrow \qquad (7)$$

$$6x_1 + 3(1 - x_1) \geq g \text{ i.e., } 3x_1 + 3 \geq g \qquad \rightarrow \qquad (8)$$

(7), (8) லுள்ள சமனிலிகளை சமன்பாடுகளாகக் கருதி கோடுகளை வரைபடத்தில் [0, 1] என்ற இடைவெளிக்குள் வரைந்தால் கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தைப் பெறுகிறோம்.



$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}$ என்று காண்கிறோம். $g = -3x_1 + 6x_2$

$$\Rightarrow g = -3\left(\tfrac{1}{4}\right) + 6\left(\tfrac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{4}$$

இதே போன்று $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{3}{4}$, $g = \frac{15}{4}$ என்றும் காணலாம்.

ஒருபடித்த திட்டமுறை (Linear Programming Method)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{ij})_{m \times n} \;\forall\; i = 1, 2 \dots m, j = 1, 2 \dots n$$

என்பது இழப்பு - ஈட்டிப்பு அணி என்க. இதில் முதல் ஆட்டக்காரர் $i = 1, 2 \dots m$ என்ற தந்திரங்களை $x_1, x_2 \dots x_m$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் விளையாடுகிறார். இதில் $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$; $x_1, x_2 \dots x_m \geq 0$ ஆகும். இதே போன்று இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் $j = 1, 2 \dots n$ என்ற தந்திரங்களை $y_1, y_2 \dots y_n$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் விளையாடுகிறார். இதில் $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$; $y_1, y_2, \dots y_n \geq 0$ ஆகும்.

g என்பது விளையாட்டின் மதிப்பு என்றால் கீழ்க்கண்ட தொடர்புகளைக் காண்கிறோம். முதல் ஆட்டக்காரருக்கு,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m \geq g \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m \geq g \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots\dots + a_{mn} x_m \geq g \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0 \;\forall\; i = 1, 2 \dots m \end{array}\right\} \quad (1)$$

என்றும்,

இரண்டாம் ஆட்டக்காரருக்கு,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \leq g \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \leq g \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{mn} y_n \leq g \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ \qquad y_j \geq 0 \ \forall\ j = 1, 2 \dots n \end{array}\right\} \quad (2)$$

என்றும் காண்கிறோம்.

இப்பொழுது (1), (2) ஆகியவைகளிலுள்ள தொடர்புகளை g ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் $\frac{x_i}{g}$ என்ற விகிதத்தை x_i' என்றும் $\frac{y_j}{g}$ என்ற விகிதத்தை y'_j என்றும் குறிப்போம்.

$$\text{பிறகு } \sum_{i=1}^{m} x_i' = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{g}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j' = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{g}$$

எனவே $\sum_{i=1}^{m} x_i'$ ஐ நீசப்படுத்தினல், $x_1, x_2 \dots x_m$ ஆகியவைகள், கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டின் மதிப்பை உச்சப்படுத்தும். இதே போன்று $\sum_{j=1}^{n} y_j'$ ஐ உச்சப்படுத்தினல், $y_1, y_2 \dots y_n$ ஆகியவைகள், கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டின் மதிப்பை நீசப் படுத்தும். இவ்வாறாக (1) லுள்ள தொடர்புகள் ஒருபடித்த திட்ட அமைப்பின் ப்ரைமல் கணக்காக அமைகிறது. (2) லுள்ள தொடர்புகள் ஒரு படித்த திட்டத்தின் ட்யூயல் கணக்காக அமைகிறது.

ப்ரைமல் கணக்கு (Primal Problem) :

$\sum_{i=1}^{m} x_i' = x_1' + x_2' + \dots + x_m'$ நீசமாக இருக்கும்படி

கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு x_1', x_2' .... x_m' ஆகியவைகளைக் காணவேண்டும்.

$$a_{11} x_1' + a_{21}' x_2' + \ldots + a_{m1} x_m' \geq 1$$
$$a_{12} x_1' + a_{22} x_2' + \ldots + a_{m2} x_m' \geq 1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} x_1' + a_{2n} x_2' + \ldots + a_{mn} x_m' \geq = 1$$
$$x_i' \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots m$$

ட்யூயல் கணக்கு (Dual Problem):

$\sum_{j=1}^{n} y_j' = y_1' + y_2' + \ldots + y_n'$ உச்சமாக இருக்கும்படி

$y_1', y_2' \ldots y_n'$ ஆகியவைகளை கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு காணவேண்டும்.

$$a_{11} y_1' + a_{12} y_2' + \ldots + a_{1n} y_n' \leq 1$$
$$a_{21} y_1' + a_{22} y_2' \ldots + a_{2n} y_n' \leq 1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} y_1' + a_{m2} y_2' + \ldots + a_{mn} y_n' \leq 1$$
$$y_j' \geq 0 \ \forall \ j = 1, 2 \ldots n$$

ஒவ்வொரு விளையாட்டிற்கும் தீர்வுகள் இருப்பதால் மேலுள்ள கணக்குகளுக்கு உச்சமாக அமைந்த தீர்வுகள் நிலைத்திருக்கும். எனவே

$$\text{நீசம்} \sum_{j=1}^{m} x_i' = \text{உச்சம்} \sum_{i=1}^{n} y_j' = \frac{1}{g}$$

விளையாட்டுக் கொள்கைக்காக அமைந்த கணக்கை, ஒரு படித்த திட்டமாக மாற்றியமைக்க வேறொரு முறை:

(1)ல் உள்ள n சமனிலிகளிலிருந்து நேராக (positive) அமைந்த மாறிகளைக் கழித்தால் பின்வருமாறு பெறுகிறோம்.

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + \ldots + a_{m1} x_m - x_{m+1} = g$$
$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + \ldots + a_{m2} x_m - x_{m+2} = g$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m - x_{m+n} = g$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$
$$x_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2 \ldots m$$

முதல் சமன்பாட்டை மற்ற ஒவ்வொரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் கழித்து, முதல் சமன்பாட்டை நோக்க சார்பாகக் கருதி பின்வருமாறு பெறுகிறோம்.

உச்சப்படுத்துக : $a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m - x_{m+1} = g$

நிபந்தனைகள் :

$$(a_{12} - a_{11}) x_1 + (a_{22} - a_{21}) x_2 + \dots + (a_{m2} - a_{m1}) x_m + x_{m+1} - x_{m+2} = 0$$

....

....

$$(a_{1n} - a_{11}) x_1 + (a_{2n} - a_{21}) x_2 + \dots + (a_{mn} - a_{m1}) x_m + x_{m+1} - x_{m+n} = 0$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2 \dots m$$

மாதிரி: கீழ்காணும் இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியை ஒரு திட்ட அமைப்பாக மாற்றி அமைக்கவும்.

ஆட்டக்காரர் B

		Q_1	Q_2	Q_3
	P_1	0	−1	1
ஆட்டக்காரர் A	P_2	1	1	−1
	P_3	1	−1	0

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியில் சேணப் புள்ளி இல்லை என்று தெரிந்த பின்னர், ஆட்டக்காரர் A என்பவர் P_1, P_2, P_3 ஆகிய தந்திரங்களை x_1, x_2, x_3 என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், ஆட்டக்காரர் B என்பவர் Q_1, Q_2, Q_3 என்ற தந்திரங்களை y_1, y_2, y_3 என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும் விளையாடுவதாக கொள்கிறோம். இதில் $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; $y_1 + y_2 + y_3 = 1$; $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0$ ஆகும்.

g என்பது விளையாட்டின் மதிப்பு என்றால் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளைப் பெறுகிறோம்.

ஆட்டக்காரர் A

$$\left.\begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geq g \\ -1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geq g \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 \geq g \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow (1)$$

என்றும்,

ஆட்டக்காரர் B க்கு,

$$\left.\begin{array}{l} 0y_1 - y_2 + y_3 \leq g \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq g \\ y_1 - y_2 + 0y_3 \leq g \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_j \geq 0 \ \forall \ j = 1, 2, 3 \end{array}\right\} \rightarrow (2)$$

என்றும் பெறுகிறோம்.

தொடர்பு (1) இலுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலிகளையும் சமன் பாடுகளாக மாற்ற, நேராக அமைந்த மாறிகளை முறையே கழித் தால் கீழ்க்கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 + x_3 - x_4 = g \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = g \\ x_1 - x_2 - x_6 = g \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \dots 6 \end{array}\right\} \rightarrow (3)$$

தொடர்பு (2) இலுள்ள ஒவ்வொரு சமனிலிகளையும் சமன் பாடுகளாக மாற்ற, நேராக அமைந்த மாறிகளை முறையே கூட்டினால் கீழ்க்கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{array}{l} -y_2 + y_3 + y_4 = g \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_5 = g \\ y_1 - y_2 + y_6 = g \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_j \geq 0 \ \forall \ j = 1, 2 \dots 6 \end{array}\right\} \rightarrow (4)$$

தொடர்பு (3) ல் உள்ள முதல் சமன்பாட்டை நோக்க சார்பாக (objective function) க் கொண்டு அதனை மற்ற சமன் பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் கழித்தால்.

நோக்கசார்பு: நீசப்படுத்து: $x_1 + x_3 - x_4 = g$

நிபந்தனைகள்:

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2 \dots 6 \end{array}\right\} \rightarrow (5)$$

எனவே (5) இலுள்ள திட்டஅமைப்பு ஆட்டக்காரர் A க்கான ஒருபடித்த திட்டஅமைப்பு ஆகும்.

இதே போன்று ஆட்டக்காரர் B க்கான ஒருபடித்த திட்ட அமைப்பு பின்வருமாறு :—

$$\left.\begin{array}{ll}\text{நோக்கசார்பு : உச்சப்படுத்து :} & -y_2 + y_3 + y_4 = g \\ \text{நிபந்தனைகள்:} & y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ & y_1 - y_3 - y_4 + y_6 = 0 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_j \geq 0,\ j = 1, 2 \ldots 6\end{array}\right\} \rightarrow (6)$$

(5) இலுள்ள திட்ட அமைப்பு ப்ரைமல் அமைப்பாகும்;
(6) இலுள்ள திட்ட அமைப்பு, ட்யூயல் அமைப்பாகும்.

விளையாட்டில் ஆதிக்கத்தின் அடிப்படை நிலை (Principle of Dominance in a Game) :

கொடுக்கப்பட்ட ($m \times n$) தரத்தைப்பெற்ற இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியில் ஒரு நிரலில் அமைந்துள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் மற்றொரு நிரலில் அமைந்துள்ள மூலகங்களை விட முறையே அதிகமாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருந்தால் அந்த நிரலை ஆதிக்கம் செய்யும் நிரல் என்று கூறுகிறோம். அத்தருணத்தில், ஆதிக்கம் செய்யும் அந்த நிரலை நீக்கிவிடுகிறோம். இதேபோன்று ஒரு நிரையில் அமைந்துள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் மற்றொரு நிரையில் அமைந்துள்ள மூலகங்களை விட முறையே குறைந்தோ அல்லது சமமாகவோ இருந்தால் அந்த நிரையை ஆதிக்கம் செய்யும் நிரை என்று கூறுகிறோம். அப்படிப்பட்ட அந்த ஆதிக்கம் செய்யும் நிரையை நீக்கிவிடுகிறோம். இவ்வாறாக ஆதிக்கத் தன்மை ஒரு விளையாட்டு அணியில் இருந்தால் அவ் விளையாட்டு அணியின் தரம், நிரைகளையும், நிரல்களையும் நீக்குவதால் குறைகிறது. எனவே பெரிய அணிகள், சிறிய அணிகளாக அமைந்து தீர்வுகளை எளிதில் காண ஏதுவாகிறது.

மாதிரி : கீழ்க்காணும் இழப்பு – ஈட்டிப்பு அணிக்கான தீர்வைக் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இழப்பு ஈட்டிப்பு அணியில் முதல் நிறையிலுள்ள மூலகங்கள், நான்காம் நிறையில் அமைந்துள்ள மூலகங்களை விடக் குறைவாகவும் அவைகளுக்குச் சமமாகவும் அமைந்துள்ளது. எனவே முதல் நிரை ஆதிக்கம் செய்கிறது. இதனுல் முதல் நிரையை, கொடுக்கப்பட்ட இழப்பு ஈட்டிப்பு அணியிலிருந்து நீக்கி விடுகிறோம். இவ்வாறுக

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ என்று பெறுகிறோம்.

இதில் முதல் நிரலிலுள்ள மூலகங்கள் மூன்றும் நிரலில் அமைந்துள்ள மூலகங்களை விட அதிகமாகவும், சமமாகவும் உள்ளதென்பதால். முதல் நிரை ஆதிக்கம் செய்கிறது என்று கூறி முதல் நிரையை நீக்கி விடுகிறோம். இவ்வாறுக ஒடுக்கப்பட்ட இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணி பின்வருமாறு

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

முதல் நிரை நீக்கப்பட்டதால் $x_1 = 0$ ஆகும்.
முதல் நிரல் நீக்கப்பட்டதால் $y_1 = 0$ ஆகும்.

ஆட்டக்காரர் A என்பவர் 2, 3, 4 என்ற தந்திரங்களை x_2, x_3, x_4 என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், ஆட்டக்காரர் B என்பவர் 2, 3, 4 என்ற தந்திரங்களை y_2, y_3, y_4 என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடுவார்கள்.

g என்பது விளையாட்டின் மதிப்பு என்க. இப்பொழுது ஆட்டக்காரர் Aக்கான நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு :

$$4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq g \quad (1)$$
$$2x_2 + 4x_3 + 0x_4 \geq g \quad (2)$$
$$4x_2 + 0x_3 + 8x_4 \geq g \quad (3)$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad (4)$$

இதே போன்று ஆட்டக்காரர் B க்கான நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு

$$4y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq g \quad (5)$$
$$2y_2 + 4y_3 + 0y_4 \leq g \quad (6)$$
$$4y_2 + 0y_3 + 8y_4 \leq g \quad (7)$$
$$y_2 + y_3 + y_4 = 1 \quad (8)$$

(1) இலிருந்து (8) வரையுள்ள சமனிலைகளை சமன்பாடு களாகக் கருதி தீர்வுகண்டால் $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{1}{3}$ என்றும் $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{2}{3}$, $y_4 = \frac{1}{3}$, $g = \frac{2}{3}$ என்றும் காணலாம்.

இவ்வாறாக ஆட்டக்காரர் A என்பவர் 1, 2, 3, 4 என்ற தந்திரங்களை முறையே $x_1 = 0$. $x_2 = 0$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 1/3$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், B என்ற ஆட்டக்காரர் 1, 2, 3, 4 என்ற தன்னுடைய தந்திரங்களை $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2/3$, $y_4 = 1/3$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும் ஆடுவார்கள். விளையாட்டின் மதிப்பு $g = \frac{8}{3}$ ஆகும்.

பயிற்சி

1. உச்ச - நீச, நீச - உச்ச முறையைப் பயன்படுத்தி கீழ் காணும் விளையாட்டு அணிகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 13 & 16 & 9 \\ 10 & 12 & 6 & 15 & 10 \\ 16 & 18 & 9 & 13 & 25 \\ 4 & 9 & 18 & 20 & 6 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ -1 & -3 & 10 \\ 2 & 12 & -6 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 2 \\ 15 & 12 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & -3 & 1 \\ 12 & -2 & 8 & -6 \\ 16 & 13 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 14 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ -3 & -1 & 6 & -2 & 5 \\ 2 & 12 & 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 15 & -20 & -12 & 3 \\ 4 & 2 & -10 & -6 \\ 20 & -18 & -15 & -8 \\ -12 & 8 & -10 & 6 \\ 10 & 9 & -11 & 4 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & 10 & 20 & 18 & 0 \\ -9 & -9 & 46 & 10 & 4 \\ 2 & 0 & 17 & 18 & 0 \\ -1 & 1 & 13 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) கீழ்க்காணும் விளையாட்டு அணிகளுக்கு (a) இயல் கணித முறை (b) அணிக் கொள்கை முறை மூலம் தீர்வு காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 10 & -2 & -5 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & -10 & -5 \\ 2 & -4 & -3 \\ 4 & -5 & -2 \\ -6 & -4 & 0 \\ 10 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 3 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 9 \\ 6 & 18 & -9 & 14 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 6 & -10 & 12 & 25 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -8 & 4 & -6 & -7 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & -2 \\ 14 & 6 & -5 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & -4 \\ 15 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ஆதிக்க தத்துவம் என்றால் என்ன ? ஆதிக்கத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி கீழ்காணும் விளையாட்டு அணிகளை ஒடுக்கம் செய்து தீர்வுகளைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 100 & 80 & 150 & 50 \\ 150 & 55 & 100 & 80 \\ 50 & 55 & 100 & 25 \\ 225 & 60 & 100 & 80 \\ 90 & 70 & 125 & 75 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 10000 & 3000 \\ 4000 & 8000 \\ 6000 & 5000 \end{pmatrix}$

(4) 3 இலுள்ள கணக்குகளை வரைபட முறை மூலம் தீர்வு காண்க.

(5) அணிக்கொள்கை முறையின் மூலம் கீழ்க்காணும் விளையாட்டு அணிகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

12. வரிசைக் கொள்கை

(QUEUEING THEORY)

நிகழ்தகவானது பயன்படுத்தப்படும் பல்வேறு தலைப்புகளில், வரிசைக் கொள்கையும் ஒன்றாகும். சாதாரணமாக நாம் நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் வரிசை முறை இருப்பதைக் காணகிறோம். பயணச் சீட்டு வாங்குமிடங்களிலும், ஆஸ்பத்திரிகளிலும், தபால் ஆபீஸ் முன்பும் வரிசையாக மக்கள் நின்றுகொண்டு தங்களுடைய வாய்ப்பு எப்பொழுது ஏற்படும் என்று எதிர்நோக்கிக் கொண்டுள்ளனர். பொதுவாக வரிசை முறை என்றால், முதலில் வரும் நபருக்கு சேவை செய்தல் என்பதே பெரும்பாலும் பின்பற்றப்படும் முறையாகும். சிற்சில சமயங்களில் கடைசியாக வரும் ஒரு நபருக்கு சலுகை கொடுக்கப்பட்டு அல்லது அவசியமானது என்று கருதப்பட்டு சேவை செய்யப்படும் நிலையையும் காண்கிறோம். உதாரணமாக சாதாரண நிலையில் சிகிச்சைகளைப் பெற நின்றுகொண்டிருக்கும் வரிசையில் கடைசியாக வந்து சேரும் அவசர சிகிச்சைக்கு முதலில் சேவை செய்யப்படுகிறது. வரிசைகள் பலவிதப்பட்டதாக அமைவதும் உண்டு. ஒரு வரிசை - ஒரு சேவகன் என்ற ஒரு நிலையும், பல வரிசை—பல சேவகர்கள் என்ற ஒரு நிலையும், ஒரு வரிசை — பல சேவகர்கள் என்ற நிலையும் காண்கிறோம். உதாரணமாக முடிதிருத்தம் செய்யப்படும் நிலையங்களில் ஒரு வரிசையும், பல சேவகர்களும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். இங்கு முதலில் வரும் நபர் முதலில் சேவையைப் பெறுகிறார்.

மேற்சொன்ன வரிசை முறைகளில் சேவைக்காக வரும் நபர்களின் விகிதம் என்ன என்று தெரியாது. இதே போன்று சேவை செய்யப்படும் விகிதமும், தெரியாது. வரிசைக்கு பெரும் விகிதமும், வரிசையை விட்டு செல்லும் விகிதமும் நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது. எந்த நேரமும் ஒரு நபர் வரிசையில் வந்து சேரலாம். இதனால்

எதிர்பார்ப்பு (Expectation) என்பது ஒரு முக்கியமான அங்கத்தை இக்கொள்கையில் பெற்றுள்ளது.

நபர்கள் சேவைக்காக வரும் நிலையை "வரும் முறை" (Input Process) என்றும் சேவையைப் பெற்ற பிறகு வரிசையை விட்டு நீங்கும் நிலையை "போகும் முறை" (Output process) என்றும் கூறுகிறோம்.

சேவைக்காக வரும் முறையானது பாய்ஸான் பரவலாகவும், சேவையைப் பெற்ற பிறகு வரிசையை விட்டு போகும் முறை யானது அடுக்குக் குறிப் பரவலாக (Exponential distribution) வும் அமைந்துள்ளது.

டி. ஜி. கென்டல் (Kendall D.G.) என்பவரின் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி "வரும் முறை", "போகும் முறை" ஆகியவை களுக்கு குறியீடுகளை அமைப்போம்.

D என்பது தீர்மானிக்கப்பட்ட அல்லது தவறாத (regular பரவலாக $F(x) = 0,\ x < a$

$= 1, x \geq a$ என்று குறிக்கிறோம்.

M என்பது அடுக்குக்குறி பரவலாகும். இதில்

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}; \lambda > 0$ ஆகும்.

E_k என்பது எர்லாங் (Erlang) பரவலாகும். இதில்

$d\,F(x) = \left\{ \frac{(\lambda\ k)^k}{(k-1)!} \right\} x^{k-1} e^{-\lambda kx} dx\ ;\ k < 0$ ஆகும். G I என்பது பொதுவான "வரும் பரவல்" (input distribution) ஆகும்.

G என்பது பொதுவான சேவைக்கால பரவலாகும் (Servic time distribution).

சாதாரணமாக வரிசை முறையை A | B | S என்று சுருக்க மாகக் குறிப்பிடுகிறோம். இதில் A என்பது "வரும் பரவல்" ஆகும். B என்பது சேவைக்காலப் பரவலாகும். S என்பது சேவகர்களின் எண்ணிக்கையாகும். உதாரணமாக M | M | 1 என்பது ஒரு சேவகரைப் பெற்ற வரிசை முறையாகும். இதில் வரிசைக்கு வரும் நபர்கள் பாய்ஸான் பரவலிலும், வரிசையை விட்டு சேவைகளைப் பெற்று போகும் நபர்கள் அடுக்குக்குறி பரவலிலும் அமைந்திருப்பதாகப் பொருள்படும்.

வரிசையின் நீளம் (Queue length) : ஒரு குறிப்பிட்ட t என்ற காலத்தில் வரிசையில் காத்துக்கொண்டிருக்கும் நபர்களின் அல்லது அலகுகளின் (units) எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது.

துரித காலம் (Busy Period) :

எந்த நபரும் அல்லது அலகும் (unit) வரிசையில் காத்திருக்காத நிலையின் காராணமாக சேவகர் அல்லது சேவகர்கள் வேலையின்றி சாதாரணநிலை (ideal state) யிலிருக்க நேரிடுகிறது. இதற்கு மாறாக சேவகர் அல்லது சேவகர்கள் தங்கள் பணியில் வெகு துரிதமாக நீடித்த காலத்திற்கு ஈடுபட்டிருந்தால் அக் காலத்தை துரிதகாலம் என்கிறோம்.

குறிப்பு : (i) வரிசைக்கு வரும் நபரின் விகிதத்தை சராசரி வந்து சேரும் விகிதம் என்று குறிக்கிறோம். இதனை λ என்று குறிக்கிறோம். $\frac{1}{\lambda}$ என்பதை இடையே வரும் காலத்தின் சராசரியாக (Mean of inter-arrival time)க் குறிக்கிறோம்.

(ii) வரிசையை விட்டு செல்லும் நிலையில் ஒரு நபருக்குச் செய்யும் சராசரி பணி விகிதத்தை (Mean service rate) μ என்று குறிப்பிடுகிறோம். மேலும் $\frac{1}{\mu}$ ஐ சராசரி மணி நேரங்கள் (Mean Servicing times) என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

குறியீடுகள் (Notations) :

n = வரிசையில் நின்று கொண்டிருக்கும் நபர்களின் எண்ணிக்கை.

E_n = n நபர்கள் வரிசையில் இருக்கக்கூடிய நிலை (State).

$P_n(t)$ = n நபர்கள் t என்ற காலத்தில் வரிசையில் நின்று கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவாகும்.

S = சேவகர்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

λ_n = n நபர்கள் வரிசையில் நின்றுகொண்டிருக்கும் பொழுது புதிய நபர்கள் வந்து வரிசையில் சேரும் சராசரி "வரும் விகிதமாகும்" (arrival rate).

μ_n = n நபர்கள் வரிசையில் நின்றுகொண்டிருக்கும் பொழுது செய்யப்படும் சராசரி பணி விகிதமாகும். (Service rate) λ_n ஆனது, எல்லா n களுக்கும் நிலையானதென்றால் அதனை λ என்று குறிப்பிடுகிறோம். இதே போன்று துரிதகாலத்தில் (Busy period) μ_n என்ற சராசரி பணி விகிதமும் நிலையெண்

என்ருல் (எல்லா $n \geq 1$ களுக்கும்) அதனை μ என்று குறிப்பிடு கிருேம். இந்த கோள்களின் (hypotheses) கீழ் $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}$ என்பன முறையே வருகைகளுக்கிடையே (between arrival) எதிர்பார்க் கும் நேரம், எதிர்பார்க்கும் பணி நேரம் (Service time) என்றும் கூறுகிருேம்.

நிலைத்த நிலையில் (Steady State) $P_n(t)$ ஆனது tக்கு சார்பற்ற தாகக் கருதப்படுகிறது. அதனல் கீழ்க்கண்ட குறியீடுகளை நிலைத்த நிலைகளுக்குப் பயன்படுத்துகிருேம்.

P_n = வரிசையில், சரியாக n நபர்கள் பணிக்காகக் காத் திருப்பதற்கான நிகழ்தகவாகும்.

L = வரிசையின் சராசரி நீளமாகும் (பணியைப் பெற்றுக் கொண்டிருக்கும் நபரையும் சேர்த்து).

L_q = வரிசையின் சராசரி நீளமாகும் (பணியைப் பெற்றுக் கொண்டிருக்கும் நபரைத் தவிர).

W = அமைப்பில் காத்திருக்கும் நேரத்தின் (Waiting time) எதிர்பார்ப்பு (பணியில் ஈடுபட்டுள்ள நபரின் நேரத்தையும் சேர்த்து).

W_q = அமைப்பில் காத்திருக்கும் நேரத்தின் (Waiting time) எதிர்பார்ப்பு (பணியில் ஈடுபட்டுள்ள நபரின் நேரத்தை நீக்கி).

தேற்றம்: Δt என்ற குறுகிய காலத்தில் வரிசைக்கு வரும் ஒரு தனி வருகை (Single arrival)க் கான நிகழ்தகவு $\lambda \Delta t$ என்றும், ஒரு வருகைக்கு மேல் வருவதற்கான நிகழ்தகவு மிகவும் சொற்பமானதென்றும் இருந்தால், வருகையின் விகிதம் பாய்ஸான் பரவலாக அமையும். நேர்மாருக, வருகையின் பரவல் பாய்ஸான் என்ருல், ஒரு வருகைக்கு மேல் Δt என்ற குறுகிய காலத்தில் வரிசைக்கு வருவதற்கான நிகழ்தகவு மிகவும் சொற்பமானதாகும்.

t என்ற நேரத்தில் n நபர்கள் வரிசைக்கு வந்துவிட்டதற் கான நிகழ்தகவு $P_n(t)$ என்க. Δt என்ற குறுகிய காலத்தில் ஒரு வருகை நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\lambda \Delta t$ என்றும், புதிய வருகை நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியம் என்றும் கொள்க.

$P_n(t)$ என்பவைகள் நிகழ்தகவுகளென்பதால் $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$

ஆகும். Δt என்ற குறுகிய காலத்தில் புதிய வருகை ஏற்படாம லிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $1-\lambda\,\Delta t$ ஆகும்.

$P_n(t)$ ஆனது $t+\Delta t$ என்ற நேரத்திலும் t என்ற நேரத்தி லும் இருக்கக்கூடிய நிலைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்க லாம்.

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\,\lambda\Delta t \quad n\geq) \quad \rightarrow (1)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\,\Delta t),\ n=0 \quad \rightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2) ல் $n=0$ என்றிருக்கும்பொழுது $(t+\Delta t)$ என்ற நேரத்தில் புதிய வருகைகள் ஏற்படாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காணலாம்.

(1), (2) ஆகியவைகளை Δt ஆல் வகுத்து மாற்றி அமைத் தால்

$$\frac{(P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)\ n\geq 1$$

என்றும், $\dfrac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$ என்றும் பெறு கிறோம்.

$\Delta t \rightarrow 0$ என்று கொண்டால்,

$$P'_n(t) = \frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t),\ n\geq 1 \quad \rightarrow (3)$$

என்றும்,

$$P_0(t) = \frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) \quad \rightarrow (4)$$

என்றும் பெறுகிறோம். (3), (4) ஆகியவைகளிலுள்ள ஒருபடித்த வகையீட்டு சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகளைக் காணவேண்டும். இதற்கு பிறப்பிக்கும் சார்பு (generating function) ஒன்றைப் பயன்படுத்தலாம். அதாவது,

$$P(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n = P_0(t) + P_1(t)\,z + \ldots\ldots \quad \rightarrow (5)$$

$$(|z| \leq 1)$$

$t=0$ என்றிருக்கும்பொழுது i நபர்கள் வரிசைக்கு வந்திருந் தால் $n \neq i$ என்றால், $P_n(0) = 0$ என்றும்

$n=i$ என்றால், $P_n(0) = 1$ என்றும் இருக்கும். இதனால்,

$$P(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)z^n = P_i(0)z^i = z^i\ (\because\ P_i(0) = 1) \quad \rightarrow (6)$$

மேலும், $P(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t) z^n, \qquad \rightarrow (7)$$

(3) ஐ z^n ஆலும், (4) ஐ z^0- ஆலும் பெருக்கி $n=0$ லிருந்து ∞ வரை கூட்டி, (5), (6), (7) ஆகியவைகளைப் பயன்படுத்தினல்

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(t) z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(t) z^{n-1} = z\{P_0(t) + P_1(z) z + \cdots\}$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$$

$$= z\, P(z, t)$$

எனவே, $\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \lambda (z-1) P(z,t)$

அதாவது, $\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} - \lambda (z-1) P(z,t) = 0 \qquad \rightarrow (8)$

(8) லிருந்து $\frac{1}{P(z,t)} \frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = (z-1)\lambda$ என்று பெறுகிறோம்

$$\Rightarrow \operatorname{Log} P(z,t) = (z-1)\lambda t + C_1$$

அல்லது $P(z,t) = C e^{(z-1)\lambda t}$

$t = 0$ எனில் $P(z,0) = 1$ ஆகும். எனவே $C = 1$ ஆகும்.

$$\therefore P(z,t) = e^{(\lambda-1)t}$$

$$\therefore P_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n P(z,t)}{\partial z^n}\right)_{z=0}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^n e^{(z-1)\lambda t}}{\partial z^n}\right\}_{z=0}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{(\lambda t)^n e^{(z-1)\lambda t}\right\}_{z=0}$$

$$\therefore P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

இது பாய்ஸான் பரவலாக அமைந்திருப்பதைக் காணலாம்.

எதிர்மாறாக, $P_n(t) = \frac{(\lambda t)_n e^{-\lambda t}}{n!}$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$P_1(t) = (\lambda t)\, e^{-\lambda t}$ ஆகும்.

எனவே ஒரு வருகைக்கு மேல் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 1-(e^{-\lambda t} + \lambda\, t\, e^{-\lambda t}) = 1 - \left\{\left[1-\lambda t + \frac{\lambda t)^2}{2!} - \cdots\right] + \lambda\, t\left[1-\lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!}\cdots\right]\right\}$$

$$= \frac{(\lambda t)^2}{2} + \cdots$$

$$= O(t^2)$$

எனவே t சிறியதென்றால் t^2ஐப் பெற்ற உறுப்பும் மிகச் சிறியதாக இருக்கும். இதனால் $O(t^2)$ மிகச் சொற்பமானதாக இருக்கும்.

<u>சராசரி எண்</u>: (Mean Number)

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$$\therefore L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$$= (\lambda t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t)$$

$$= \lambda t \left[\because \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t) = 1\right]$$

எனவே $L = \lambda t$ ஆகும்.

<u>மாறுபாடு</u>: (Variance)

$$\text{மாறுபாடு} = \sum_{n=0}^{\infty} (n-L)^2 P_n(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + L^2 - 2nL) P_n(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} L^2 P_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} 2nL P_n(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) + L^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) - 2L \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} + L^2 . 1 - 2L(\lambda t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{!n} + L^2 - 2L^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t) e^{-\lambda t}}{n!} - L^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} - L^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} - L^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right\} (\lambda t) e^{-\lambda} - L^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} - L^2$$

$$= (\lambda t)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-2} e^{-\lambda t}}{(n-2)!} + (\lambda t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} - L^2$$

$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - L^2$$
$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2$$
$$= \lambda t$$

எனவே சராசரி = மாறுபாடு = λt ஆகும்.

L - க்கும் W - க்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு

$\lambda_n = \lambda$ (நிலையெண்) $\forall$ n என்றால்,

$L = \lambda W$

$L_q = \lambda W_q$ ஆகும்.

சராசரி பணி செய்யப்படும் நேரம் $\frac{1}{\mu}$ நிலையெண் என்றால்

$\forall\, n \geq 1,\ W = W_q + \frac{1}{\mu}$ ஆகும்.

M/M/1 வரிசை அமைப்பு (M/M/1 queueing model):

ஒரு பணியாளைக் கொண்ட இந்த வரிசையமைப்பில் கீழ்க் கண்ட தொடர்புகளைக் காணலாம்.

$$\begin{aligned} P_n (t + \triangle t) &= P_n (t) (1 - \lambda \triangle t) (1 - \mu \triangle t) \\ &+ P_{n-1} (t) (\lambda \triangle t) (1 - \mu \triangle t) \\ &+ P_{n+1} (t) (1 - \lambda \triangle t) (\mu \triangle t) \\ &+ P_n (t) (\lambda \triangle t) (\mu \triangle t),\ (n \geq 0) \end{aligned} \rightarrow (2)$$

$$P_0 (t + \triangle t) = P_0 (t) (1 - \lambda \triangle t) + P_1 (t) (\mu \triangle t) (1 - \lambda \triangle t)$$
$$(n=0) \rightarrow (2)$$

$\triangle t \rightarrow 0$ எனக் கொண்டு (1), (2) ஆகியவைகளைக் கீழ் கண்டவாறு மாற்றி அமைக்கிறோம்.

$$\underset{\triangle t \rightarrow 0}{\text{எல்லை}} \frac{P_n (t + \triangle t) - P_n (t)}{\triangle t} = P_n' (t)$$

$$= -(\lambda + \mu) P_n (t) + \lambda P_{n-1} (t) + \mu P_{n+1} (t) \rightarrow (3)$$

$$\underset{\triangle t \rightarrow 0}{\text{எல்லை}} \frac{P_0 (t + \triangle t) - P_0 (t)}{\triangle t} = P_0' (t)$$

$$= -\lambda P_0 (t) + \mu P_1 (t);$$
$$(n=0) \rightarrow (4)$$

M/M/ 1 வரிசையில் நிலைத்த நிலைக்கு (Steady State) த் தீர்வு :

M/M/ வரிசையில், நிலைத்த நிலைக்கு $\lambda < \mu$ என்றிருத்தல் அவசியம். மேலும் $P_n'(t) = 0$ எனவே $P_n'(t) = 0, P_n(t) = P_n'$ என்று கொண்டால் (3) , (4) ஆகியவைகளிலிருந்து,

$$(\lambda+\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \rightarrow (5) \ (n > 0)$$

$\lambda P_0 = \mu P_1$, $(n = 0) \rightarrow$ (6) என்று பெறுகிறோம்.

(6) லிருந்து $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$ என்று பெறுகிறோம்.

$n=1$ என்று கொண்டால் (5) ஆனது,

$(\lambda+\mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ என்று அமைகிறது.

இப்பொழுது $P_1 \ \frac{\lambda}{\mu} \ P_0$ என்று பிரதியீடு செய்தால்,

$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$ என்று பெறுகிறோம்.

$n=2$ என்று (5) ல் கொண்டால்,

$(\lambda+\mu)P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3$ என்று அமைகிறது.

இப்பொழுது $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$, $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$ என்று பிரதியீடு செய்தால் $P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$ என்று பெறுகிறோம்.

இவ்வாறாக $P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$

$$P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0$$

$$P_6 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 P_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad \rightarrow (7)$$

இப்பொழுது $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ ஆகும்.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$= P_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots\ldots \right\}$$

$$= P_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right)$$

$$\Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$ ஆகும். → (8)

எனவே $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left[1 - \frac{\lambda}{\mu} \right]$$

$\frac{\lambda}{\mu} > \rho$ எனில், $P_n = \rho^n (1 - \rho)$ என்று பெறுகிறோம். → (9)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$\left\{ \because P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \right\}$$

$$= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho \frac{d}{d\rho} (\rho)^n \; ; \; \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$= (1-\rho)\,\rho\,\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n}\right)$$

$$= (1-\rho)\,\rho\,\frac{d}{d\rho}\left(1+\rho+\rho^{2}+\text{------}\right)$$

$$= (1-\rho)\,\rho\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= (1-\rho)\,.\,\rho.\,\frac{1}{(1-\rho)^{2}}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\therefore L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$ ஆகும்.

மாறுபாடு $= \sum_{n=0}^{\infty}(n-L)^{2}P_{n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n^{2}+L^{2}-2nL)P_{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}n^{2}P_{n} + L^{2}\sum_{n=0}^{\infty}P_{n} - 2L\sum_{n=0}^{\infty}nP_{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}n^{2}P_{n} + L^{2} - 2L.\,L\left(\because \sum_{n=1}^{\infty}P_{n}=1\,,\ \sum_{n=0}^{\infty}nP_{n}=L\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}n^{2}P_{n} - L^{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}n^{2}P^{n}(1-\rho) - L^{2}\quad\left(\because \rho_{n}=\rho^{n}(1-\rho)\right)$$

$$= (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \rho^n - L^2$$

$$= (1-\rho)\, \rho \frac{d}{d\rho} \rho \left(\frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) - L^2$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} - L^2$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2}$$

$\therefore$ மாறுபாடு $= \dfrac{\rho}{1-\rho} + \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = L + L^2$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, P_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n + P_0$$

$$= L - 1 + P_0 \quad \left(\because \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = L \,,\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \right)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - 1 + (1-\rho) \quad (\because P_0 = 1-\rho)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

$$= \rho \left\{ \frac{1}{1-\rho} - 1 \right\}$$

$$= \rho \left\{\frac{1-1+\rho}{1-\rho}\right\}$$

$$= \rho^2 \left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$\therefore L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\therefore W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \left(\frac{\rho^2}{1-\rho}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot \frac{\mu}{\mu-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)$$

$$\therefore W_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)$$

மாதிரி :

ஒரு தபால் தந்தி அலுவலகத்தில் ஒரே ஒரு பணியாள் தபால் தலைகள் போன்றவற்றை கொடுக்கிறார். சராசரி விகித மாக 30 பேர்கள் 1 மணி நேரத்திற்கு மக்கள் வரிசைக்கு வருகின்றனர். ஒரு நபருக்கு பணிபுரிய சராசரி மணிநேரம் 90 வினாடிகளாகின்றன. என்றால் நிலைத்த நிலைக்கான நிகழ் தகவையும், L, L_q, W, W_q. ρ ஆகியவைகளையும் காண்க.

இங்கு வரிசையின் அமைப்பு M/M/1 அமைப்பாகும்.

$$\lambda = \frac{30}{60} = \tfrac{1}{2} \text{ ஆகும். (ஒரு நிமிடத்திற்கு)}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{90}{60} \text{ அல்லது } \mu = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$ (ஒரு நிமிடத்திற்கு ஆகும்.

எனவே $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)^n \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(1 - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n, \; n = 0, 1, 2 \ldots\ldots \text{ ஆகும்.}$$

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - 3/4} = \frac{\frac{3}{4}}{1/4} = 3 \text{ ஆகும்.}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{1/2} = 6 \text{ (நிமிடங்களுக்கு ஒரு நபர்)}$$

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 - 3/4} = \frac{9}{16(1/4)} = \frac{9}{4}$$

$\therefore\ L_q = \frac{9}{4}$ ஆகும்.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{9}{4} \Big/ \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி: சிறப்பு அங்காடியில் வேலை செய்யும் ஒரு குமாஸ்தா 0.90 நிகழ்தகவுடன் வரிசையில் நிற்கும் நபர் 12 நிமிடங்களுக்கு மேல் காத்திருக்காதிருப்பதற்கு எவ்வளவு சராசரி விகிதத்தில் வேலை செய்யவேண்டும்? ஒரே ஒரு குமாஸ்தா மட்டும் வேலை செய்வதாகக் கொண்டால், வரிசைக்கு வரும் நபர்களின் சராசரி விகிதம் ஒரு மணிக்கு 15 பேர்கள் என்றால் பணி செய்யும் வீதம் என்ன என்பதைக் காண்க.

$$\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

μ ஐக் காண்பதற்கு, P_r {காத்திருக்கும் நேரம் $\geq 12\} = 1-0{\cdot}90$ ஐப் பயன்படுத்துகிறோம்.

அதாவது P_r {காத்திருக்கும் நேரம் $\geq 12\} = 0.10$

$$\Rightarrow \int_{12}^{\infty} \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-(\mu-\lambda)w}\, dw = 0.10$$

$$\Rightarrow \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left\{ \frac{e^{-(\mu-\lambda)w}}{(\mu-\lambda)} \right\}_{0}^{\infty} = 0.10$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu}\, e^{-12(\mu-\lambda)} = 0.10$$

$$\Rightarrow e^{(3-12\mu)} = 0.4\,\mu$$

$$\text{or } \frac{1}{\mu} = 2.84 \text{ நிமிடங்கள்}$$

மாதிரி: தொலைபேசி நிலையத்தில் சராசரியாக 10 நிமிடத்திற்கு ஒரு முறை அழைப்பீடு, பாய்ஸான் முறையில் அமை

கிறது. பேசும் காலம் சராசரியாக மூன்று நிமிடமாக, அடுக்குக் குறிப் பரவலாக அமைகிறது என்றால்,

(i) தொலைபேசி நிலையத்திற்கு வரும் ஒரு நபர் காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

(ii) காலம் செல்லச் செல்ல ஏற்படக் கூடிய வரிசையின் சராசரி நீளம் என்ன ?

(i) இங்கு $\lambda = \frac{1}{10}, \mu = \frac{1}{3}$ ஆகும்.

எனவே $P_r (w > o) = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10} = 0.3$

(ii) $L = \frac{\lambda/\mu}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{0 \cdot 3}{0 \cdot 7} = \frac{3}{7}$

பிறப்பு - இறப்பு முறை (Birth-Death Process) :

பணி செய்யப்படும் வீதமும், வரிசைக்கு வரும் வீதமும், வரிசையின் நீளத்தைச் சார்ந்து அமைந்திருப்பதால் வரிசை முறையானது ஒரு பொதுப்படையாக அமைந்த ஒரு பணியாளைப் பெற்ற வரிசை முறையாக அமையும். இப்பொழுது இருவிதமான நிலைத்திரிபுகள் ஏற்படும் நிலையைக் கருதுவோம். அதாவது, ஏதாவது ஒரு உறுப்பு Δt என்ற நேரத்தில் பிறப்பு ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\lambda_n \Delta t + 0 (\Delta t)$ என்று அமைவதாக கருதுகிறோம். மேலும் Δt என்ற அதே நேரத்தில் இறப்பு ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\mu_n \Delta t + 0(\Delta t)$ என்று அமைவதாக கருதுகிறோம். இதைத் தவிர ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு மேல் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $0 (\Delta t)$ என்று கொள்கிறோம். தெளிவாக ஒருவித மாறுதலும் ஏற்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + 0 (\Delta t)$ என்று அமைவதைக் காணலாம். இவ்வாறு பிறப்பும் இறப்பும் கலந்து அமைந்த முறையீட்டை "பிறப்பு - இறப்பு" முறை என்று கருதுகிறோம்.

முன்பு சொன்னது போன்று $P_n (t), \lambda_n, \mu_n$ ஆகியவைகளைக் கொண்டு $t, (t+\Delta t)$ ஆகியவைகளுக்கு $P_n (t)$ மூலம் தொடர்பை அமைத்து $\Delta t \to 0$ என்று கொண்டு வகையீடு - வேறுபாட்டு சமன்பாட்டை (Differential. Difference equation) ப் பெறுகிறோம்.

அதாவது

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)\,P_n(t) + \lambda_{n-1}\,P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}\,P_{n+1}(t)\ ,\ n > 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$\frac{d\,P_0(t)}{t} = -\lambda_0\,P_0(t) + \mu_1\,P_1(t),\quad n = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$t \rightarrow \infty$ என செய்து $\frac{d\,P_n(t)}{dt} = 0$ எனக் கொண்டு, t ஐ

நீக்க முயன்றால், (1), (2) ஆகியவைகளிலிருந்து கீழ்க்கண்ட வேறுபாட்டு சமன்பாடுகளை நிலைத்த நிலைக்கு (Steady State) ப் பெறுகிறோம்.

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)\,P_n + \lambda_{n-1}\,P_{n-1} + \mu_{n+1}\,P_{n+1}\ (n>0) \rightarrow (3)$$

$$0 = -\lambda_0\,P_0 + \mu_1\,P_1\ ,\ n=0 \quad \rightarrow (4)$$

(4) லிருந்து $P_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\,P_0$ என்று பெறுகிறோம். இதே

போன்று n=1, 2, 3, ... (n−1) என்று (3) ல் பிரதியீடு செய்து கீழ்க்கண்ட தொடர்புகளைப் பெறுகிறோம்.

$$P_2 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\,P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\mu_3}\,P_0$$

....

....

$$P_n = \frac{\lambda_0}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdot\frac{\lambda_3}{\mu_4}\,\ldots\ldots\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\,P_0$$

எனவே $P_n = \dfrac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=2}^{n}\mu_i}\,P_0$

ஆனால் $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=2}^{n} \mu_i} \right\} P_0 \rightarrow (6)$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \Big/ \prod_{i=2}^{n} \mu_i} \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{S}$$

இங்கு $S = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \mu_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots \infty$

வகை I: $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$ என்றால்

$$S = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots \infty$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu} < 1 \text{ என்றால்}\right)$$

எனவே $P_0 = \frac{1}{S} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

$$\therefore P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

இது M/M/1 அமைப்பைக் குறிப்பதாக உள்ளது என்பதைக் காணலாம்.

வகை II: $\left(\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}, \mu_n = \mu\right)$

இவ்வகையை ஊக்கமில்லாத வரிசை (Queue with discouragement) என்று கூறுகிறோம்.

இங்கு $S = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2.3\mu^3} + \dots \infty$

$$= 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots \infty$$

$$= e^{\rho}$$

எனவே $P_0 = \frac{1}{S} = e^{-\rho}$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho e^{-\rho}$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 = \frac{\rho^2 e^{-\rho}}{2!}$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!}$$

வகை III: $\lambda_n = \lambda$; $\mu_n = n\mu$ என்றால் இந்த வகையில் λ_n ஆனது n ஐச் சார்ந்திருக்காது. ஆனால் n அதிகமாக ஆக μ_n ஆனது உயரும்.

இங்கு $S = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2.1\,\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3.2.1.\mu^3} + \dots \infty$

$$= 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \dots \infty$$

$= e^{\rho}$ ஆகும்.

எனவே $P_0 = e^{-\rho}$

$P_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$ ஆகும்.

அளவான இடைவெளி கொண்ட ஒரு பணியாளைப் பெற்ற வரிசை அமைப்பு (Limited Space Single Server Queueing Model):

இந்த அமைப்பில் $\lambda_n = \begin{cases} \lambda\ , n = 0, 1, 2 \ldots N-1 \text{ எனில்} \\ 0\ , n \geq N \text{ எனில்} \end{cases}$

$\mu_n = \mu\ , n = 1, 2 \ldots$ ஆகும்.

அதாவது N நபர்களுக்கு மட்டும்தான் இட அமைப்பு உள்ளது என்று பொருள்.

எனவே இங்கு

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -(\lambda + \mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad 0 < n \leq N-1 \rightarrow (1)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)\ , n \geq N \rightarrow (2)$$

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)\ , n = 0 \rightarrow (3)$$

$t \rightarrow \infty$ எனச் செய்தால், கீழ்கண்ட வேறுபாட்டு சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$(\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \quad o < n \leq N-1 \rightarrow (4)$$

$$\mu P_n = \lambda P_{N-1}\ , n \geq N \rightarrow (5)$$

$$\lambda P_0 = \mu P_1\ , n = 0 \rightarrow (6)$$

(4), (5), (6) ஆகியவைகளுக்குத் தீர்வு கண்டால்,

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \rightarrow (7)$$ என்று கிடைக்கிறது.

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1 \rightarrow (8)$$

$$1 = \sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= P_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \right.$$

$$= P_0 \left\{ \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_0} = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \rightarrow (9)$$

எனவே $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left\{ \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \right\} \rightarrow (10)$

$$L = \sum_{n=0}^{N} n P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left\{ \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n \rho^n \left\{ \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right\}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$= \left\{ \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right\} \sum_{n=0}^{N} n \rho^n$$

$$= \left\{ \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right\} \rho \sum_{n=0}^{N} \frac{d}{d\rho} \rho^n$$

$$= \left\{\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right\} \rho \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{N} \rho^n\right)$$

$$= \left\{\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right\} \rho \frac{d}{d\rho}\left\{\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right\}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$$

$$L_q = L - (1-P_0)$$

$$= L - \left\{1 - \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}}\right\}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} - \left\{1 - \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}}\right\}$$

மாதிரி : ஒரு பணியாளைக் கொண்ட ஒரு வரிசை அமைப்பின், "வரும் வீதம்" பாய்ஸான் பரவலாகவும் "போகும் வீதம்" அடுக்குக் குறியீட்டுப் பரவலாகவும் அமைந்துள்ளது. சராசரி வரும் விகிதம், ஒரு மணி நேரத்திற்கு 3 ஆகும். எதிர்பார்க்கும் பணி நேரம் (Service time) 0.25 மணியாகும். உச்சமாக அமைந்த அமைக்கும் அலகுகள் இரண்டு ஆகும். நிலைத்த நிலைக்கான நிகழ்தகவுகளையும், L ஆகியவற்றையும் காண்க.

இங்கு $\lambda = 3$ அலகுகள் / மணிக்கு

$$\frac{1}{\mu} = \frac{25}{100} = 1/4$$

$$\therefore \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$N = 2 \;\therefore P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{37}{64}\right)}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \frac{16}{37}$$

$$L = \left\{\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right\} - \frac{(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

$$= \left\{\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right\} - \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)^{3}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{3}} \quad \left(\because \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} N=2\right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} - 3 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{64}{37}$$

$$= 3 - 3\left(\frac{27}{37}\right)$$

$$= 3\left(1 - \frac{27}{37}\right)$$

$$= 3\left(\frac{10}{37}\right)$$

$$= \frac{30}{37}$$

பயிற்சி

(1) M/M/1 வரிசை அமைப்பை விவரித்து அதற்கான சராசரி வரிசை நீளம், சராசரி காத்திருக்க வேண்டிய நேரம் முதலியவற்றை வருவிக்கவும்.

(2) ஒரு பணியாளைக் கொண்ட பயணச் சீட்டு வாங்குமிடத்தில் வரிசைக்கு வந்து சேரும் சராசரி விகிதம் ஒரு மணிக்கு 20 பேர்கள் என்றும், சராசரி பணி நேரம் 60 வினாடிகள் என்றும் தெரியவந்தது. அப்படி என்றால்

(i) நிலைத்த நிலைக்கான நிகழ்தகவு.

(ii) சராசரி வரிசையின் நீளம்.

(iii) சராசரி காத்திருக்க வேண்டிய நேரம்.

முதலியவற்றைக் காண்க.

(3) பிறப்பு - இறப்பு அமைப்பு என்றால் என்ன? இம்முறையைப் பற்றி விவரித்து எழுதவும். எப்பொழுது இந்த அமைப்பு M/ M/ 1 அமைப்புக்குச் சமமாகிறது?

(4) அளவான இடைவெளி கொண்ட ஒரு பணியாளைப் பெற்ற வரிசை அமைப்பைப் பற்றி விவரித்து அதற்கான L, L_q, W, W_q முதலியவற்றை வருவிக்கவும்.

13. "மார்க்காவ்" -ன் சங்கிலிகள்

(MARKOV - CHAINS)

பல்வேறு முயற்சிகளை மேற்கொள்ளும்பொழுது ஏதாவதொரு முயற்சியின் விளைவு, அதற்கு முன்பு மேற்கொள்ளப்பட்ட முயற்சியினை பொறுத்து அமைந்திருக்க நேரிடுகிறது. இதனால் ஏற்படக் கூடிய விளைவு எத்தன்மையது என்று அறிய முற்படுகிறோம். அதாவது ஒரு நிகழ்ச்சியின் விளைவானது, அந் நிகழ்ச்சி நேரிடுவதற்கு சற்று முன்பு ஏற்பட்ட ஒரு நிகழ்ச்சியை சார்ந்திருந்தால், பின்பு நிகழக் கூடிய அந்த நிகழ்ச்சியின் முடிவைக் காண முற்படும் நிலையைக் காண விழையும் நிலையை மார்க்காவ் (Markov) என்பவர் உருவாக்கியுள்ளார். இவ்வத்தியாயத்தில் இதைப் பற்றிக் காண்போம்.

O_1, O_2, O_3, O_4 ... என்பது ஒரு தொடர்ச்சியாக அமைந்த பல்வேறு முயற்சிகளின் விளைவுகள் என்க. தொடர்ச்சியாக அமைந்த பல முயற்சிகள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட் பட்டிருந்தால் அது ஒரு முடிவான மார்க்காவ் சங்கிலி என்று கூறுகிறோம்.

நிபந்தனைகள் : (i) $(e_1, e_2, \ldots\ldots e_m)$ என்ற தொடர் அமைப்பு மேற்கொள்ளப்படும் முயற்சிகளின் பல்வேறு விளைவுகளின் முடிவுடைய தொகுதியைக் குறித்தால், $O_1, O_2, O_3 \ldots$ என்ற விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் இத் தொகுதிகளில் இருத்தல் அவசியம்.

(ii) ஒவ்வொரு முயற்சியின் விளைவும், அதற்கு சற்று முன்பு மேற்கொள்ளப்பட்ட முயற்சியின் விளைவை மட்டும் சார்ந்திருக்க வேண்டும்.

(iii) e_n என்பது n–ஆவது முயற்சியின் விளைவைக் குறித்தால் பின்பு n–ஆவது நேரத்தில் அல்லது நிலையில் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி e_n என்ற நிலையில் இருப்பதாகக் கூறப்படும்.

e_i என்ற நிலைக்கு அடுத்து, e_j என்ற நிலையை இத்தொகுதி உடனே அடைவதற்கான நிகழ்தகவை P_{ij} குறித்தால் (e_i, e_j)

என்ற ஒவ்வொரு ஜோடியான நிலைகளுக்கும் ஏற்ப p_{ij} என்ற நிகழ்தகவு அமையும்.

p_{ij} ஐ நிலைத்திரிபு நிகழ்தகவு (transient probability) என்று கூறுகிறோம்.

பொதுவாக p_{ij} என்ற நிகழ்தகவுகளை ஓர் அணியின்மூலம் குறிப்பிடுகிறோம். அதாவது $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots m$ என்ற பல்வேறு நிலைகளுக்கேற்ப நிகழக்கூடிய நிகழ்தகவுகளை

$$P = (p_{ij})_{m \times m} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \cdots\cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \cdots\cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & p_{mm} \end{bmatrix}$$

என்று குறிப்பிடுகிறோம். இந்த அணியை நிலைத்திரிபு அணி (transition matrix) என்று கூறுகிறோம். மேலே குறிப்பிட்டுள்ள அணியின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்தகவு மதிப்புகளைப் பெற்றுள்ளது. நிலைத்திரிபு அணியின் ஒவ்வொரு நிரையும் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராக அமையும். எனவே ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களின் கூடுதல் 1 என்றிருக்கும்.

ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி (Stochastic Matrix)

$P = (p_{ij})$ என்பது ஒரு சதுர அணியாக இருந்து ஒவ்வொரு நிரையும் ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராக இருக்குமேயானால் அந்த அணியை ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்கிறோம். மேலும் நிகழ்தகவு விதியின்படி P என்ற அணியிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் எதிர் எண்ணுக (negative number) இல்லாமல், ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களின் கூடுதல் 1 எனறிருத்தல் அவசியம்.

தேற்றம்: A, B என்ற இரு அணிகள் ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளென்றால், C= AB என்ற அணியும் ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருக்கும்.

சில முடிவுகள்: (i) P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்றால் P^n என்ற அணியும் ($\forall$ n = 2,3, ... n) ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருக்கும்.

(ii) $P_{n \times n}$ என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருந்து $p = (p_1, p_2, \ldots\ldots p_n)$ என்பது ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராக இருந்தால் பின்பு p P என்பது ஒரு நிகழ்தகவு வெக்டராக அமையும்.

(iii) P என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருந்து, அதிலுள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் நேர் எண்களாக (positive numbers) இருந்து, P^n என்ற அணியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் நேராக இருந்தால், கருதப்பட்ட P என்ற அணியை ஒழுங்கான ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்கிறோம்.

ஓர் ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் பண்புகள் (Properties of a Stochastic Matrix)

P என்பது ஓர் ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்றால்,

(i) P-ன் ஒவ்வொரு நிரை வெக்டரும், நேராக அமைந்த மூலகங்களைப் பெற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டராக இருக்கும்.

(ii) T என்ற அணியின் ஒவ்வொரு நிரையும் t என்ற நிலையான புள்ளியாக இருந்தால் P, P^2, P^3,...... என்ற அணிகளின் தொடர் முறையானது T என்ற அணியை அணுகும்.

மாதிரி : $$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

என்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரைக் கண்ட பின்பு P^n என்ற அணி அணுகக்கூடிய T என்ற அணியையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டர் $t = (t_1, t_2, t_3)$ என்க.

எனவே ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் பண்புக்கு ஏற்ப $tP = t$ என்றிருத்தல் அவசியம்.

அதாவது,

$$[t_1, t_2, t_3] \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [t_1, t_2, t_3]$$ என்றிருக்க வேண்டும்.

$$\Longleftrightarrow \frac{t_2}{2} = t_1$$

$$\frac{3}{4}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + t_3 = t_2$$

$$\frac{1}{4}t_1 = t_3.$$

$\therefore$ $t_2 = 2t_1$, $3t_1 + 2t_2 + 4t_3 = 4t_2$
$t_1 = 4t_3$ என்றிருப்பதை அறிகிறோம்.

அதாவது $t_1 = \frac{4}{13}$, $t_2 = \frac{8}{13}$, $t_3 = \frac{1}{13}$ என்று பெறுகிறோம்.

எனவே $t = \left[\frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{1}{13}\right]$ ஆகும்.

இப்பொழுது $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{19}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{5}{16} & \frac{10}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

இவ்வாருக P^5, P^6,......P^n என்று காண்போமானல்

$$P^n\text{-ன் எல்லை மதிப்பு } T = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{8}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

என்று காணலாம்.

(iii) p என்பது ஏதாவதொரு நிகழ்தகவு வெக்டர் என்ருல் pP, pP^2, pP^3...... என்ற வெக்டர்களின் தொடர்முறை t என்ற நிலையான புள்ளியை அணுகும்.

P என்ற நிலைத்திரிபு அணியானது ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக அமைகிறது. இதைத் தவிர, எந்த ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியும் நிலைத்திரிபு அணியாகவும் அமையும். இத்தகைய ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியும், $< e_i >$ எனும் தொடக்கநிலைப் பரவலும் சேர்ந்து O_1, O_2,...... என்ற நிலைகளுக்கான 'மார்காவ்'-ன் சங்கிலியை முற்றிலும் வரையறுக்கும் என்று அறியலாம்.

மாதிரி : அலுவலகம் செல்லும் ஒரு குமாஸ்தா ஒவ்வொரு நாளும் பஸ்ஸிலோ அல்லது மிதிவண்டியிலோ அலுவலகத்திற்குச் செல்வது வழக்கம். தொடர்ச்சியாக அவர் இரண்டு நாள்கள் பஸ்ஸில் செல்வாராஞல், மூன்ருவது நாள் மிதிவண்டியில் செல்வதற்கான வாய்ப்பு சரிசமமாக இருந்தால், இந் நிகழ்ச்சிகளுக்கான ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியைக் காண்க.

குமாஸ்தா பஸ்ஸில் செல்லும் நிகழ்ச்சியை B என்றும் மிதிவண்டியில் செல்லும் நிகழ்ச்சியை C என்றும் குறிப்பிடுவோம். எனவே இந்நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிலை வெளி (state space) {B,C} ஆகும். குமாஸ்தா தொடர்ந்து இரண்டு நாள்கள் பஸ்ஸில்

செல்வார் என்றும், மூன்றாவது நாள் மிதிவண்டியில் செல்வார் என்றும் கொள்வோம். அவர் பஸ்ஸிலோ மிதிவண்டியிலோ செல்லச் சரிசம வாய்ப்பு உண்டு என்பதால் கீழ்க்காணும் நிலைத் திரிபு அணியைப் பெறுகிறோம்.

$$P = \begin{array}{c} \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

மாதிரி : $\{Y_n, n \geq 0\}$ என்பது சார்பற்ற, ஒரேமாதிரியான பரவலைப் பெற்ற ராண்டம் மாதிரிகளைக்கொண்ட கோவை என்க. பின்பு $P[Y_0 = 1] = p = 1 - P[Y_0 = 0], 0 < p < 1$ என்றிருந்து $X_n = (Y_{n-1}, Y_n), n = 1, 2 \ldots\ldots$ என்றால் $\{X_n, n \geq 1\}$ என்பது மார்க்காவ் சங்கிலி என்பதை நிறுவுக. மேலும் P என்ற நிலைத் திரிபு அணியைக் கண்டு $P^2, P^3, \ldots P^n$ ஆகியவைகளையும் காண்க.

$$P\{X_n = (F, F) = (0, 0)\} = q^2$$

$$P\{X_n = (F, S) = (0, 1)\} = P\{X_n = (S, F) = (1, 0)\} = pq$$

$$P\{X_n = (S, S) = (1, 1)\} = p^2$$

S என்பது வெற்றியையும், F என்பது தோல்வியையும் குறிக்கிறது. O_n என்பது nஆம் முயற்சியின் கண்டறிந்த நிகழ்ச்சி என்றால்

$$p_{11} = P[O_{n+1} = S, O_n = S / O_n = S, O_{n-1} = S]$$
$$= P(O_{n+1} = S) = p$$

$$p_{12} = P[O_{n+1} = F, O_n = S / O_n = S, O_{n-1} = S]$$
$$= P[O_{n+1} = F] = q$$
$$p_{13} = P[O_{n+1} = S, O_n = F / O_n = S, O_{n-1} = S] = O$$
$$p_{14} = P[O_{n+1} = F, O_n = F / O_n = S, O_{n-1} = S] = O$$
$$p_{21} = P[O_{n+1} = S, O_n = S / O_n = F, O_{n-1} = S] = O$$
$$p_{22} = P[O_{n+1} = F, O_n = S / O_n = F, O_{n-1} = S] = O$$
$$p_{23} = P[O_{n+1} = S, O_n = F / O_n = F, O_{n-1} = S] = p$$
$$p_{24} = P[O_{n+1} = F, O_n = F / O_n = F, O_{n-1} = S] = q$$
$$p_{31} = P[O_{n+1} = S, O_n = S / O_n = S, O_{n-1} = F] = p$$
$$p_{32} = P[O_{n+1} = F, O_n = S / O_n = S, O_{n-1} = F] = q$$
$$p_{33} = P_{34} = O$$
$$p_{41} = P[O_{n+1} = S, O_n = S / O_n = F, O_{n-1} = F] = O$$
$$p_{42} = P[O_{n+1} = F, O_n = S / O_n = F, O_{n-1} = F] = O$$

$$p_{43} = P[O_{n+1} = S, O_n = F / O_n = F, O_{n-1} = F] = p$$
$$p_{44} = q$$

$$\therefore P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2 . P^2 = \begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^3 = P^2$$
$$P^4 = P^3 \cdot P = P^2 \cdot P = P^3 = P^2$$

இவ்வாறாக $P^n = P^2$

$$\therefore P^n = \begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{bmatrix}$$

என்று பெறுகிறோம்.

எனவே $\{X_n, n \geq 1\}$ என்பது ஒரு மார்க்காவ் சங்கிலி என்பதைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி : A என்ற 2×2 தரத்தைப் பெற்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியானது பிரதி $A \geq 1$ என்றிருக்கும்பொழுது இரு நிறுத்த நிலைத்திரிபு நிகழ்தகவு (two stop transition probability) அணியாக இருக்கும் என்பதைக் காட்டுக.

($P = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$ என்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியில்

$0 \leq a \leq 1$ என்றும் $0 \leq b \leq 1$ என்றுமிருந்தால் அது இரு நிறுத்த நிலைத்திரிபு அணியாகும்.)

$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்க.

$$P^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2+\beta(1-\alpha) & \alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)(1-\beta \\ \alpha\beta+\beta(1-\beta) & \beta(1-\alpha)+(1-\beta)^2 \end{bmatrix}$$

இப்பொழுது $\alpha^2+\beta(1-\alpha)+\beta(1-\alpha)+(1-\beta)^2$-ஐக் கருதுக.

எனவே $\alpha^2+\beta(1-\alpha)+\beta(1-\alpha)+(1-\beta)^2$

$$= \alpha^2+2\beta(1-\alpha)+(1-\beta)^2$$

$$= 1+(\alpha-\beta)^2 \geq 1$$

[ஏனெனில் $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$]

மாற்றாக,

$P^2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$, $\alpha+(1-\beta) \geq 1$

என்றிருக்கட்டும்.

இப்பொழுது $\exists$ $P \ni P = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$

இதில் $a, b \geq 0$. இப்பொழுது a, b ஆகியவைகளைக் காண முயல்வோம்.

$$P^2 = \begin{bmatrix} a^2+b(1-a) & a(1-a) + (1-a)(1-b) \\ ab+b(1-b) & b(1-a) + (1-b)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a^2+b(1-a) = \alpha \qquad \ldots (1)$$

$$ab + b(1-b) = \beta$$

$$a^2 - 2ab+b^2 = \alpha - \beta$$

$$\text{i.e. } (a-b)^2 = \alpha - \beta$$

எனவே $a-b = \sqrt{\alpha-\beta}$ (ஏனெனில் $\alpha - \beta \geq 0$)

இப்பொழுது (1)-லிருந்து,

$$a^2+b(1-a) = \alpha$$

அதாவது $a^2+b-ab = \alpha$

$$a(a-b) + b = \alpha$$

$$a(\sqrt{\alpha-\beta})+b = \alpha$$

$$a-b = \sqrt{\alpha-\beta}$$

$$a(1+\sqrt{\alpha-\beta}) = \alpha+\sqrt{\alpha-\beta}$$

$$\therefore a = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha-\beta}}{1+\sqrt{\alpha-\beta}}$$

$$b = \frac{\beta}{1+\sqrt{\alpha-\beta}}$$

இப்பொழுது $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ என்றிருப்பதைக் காண லாம். எனவே a, b ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண முடியும். இவ்வாறாக 2×2 தரத்தைப் பெற்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியானது இரு நிறுத்த நிலைத்திரிபு நிகழ்தகவு அணியாக அமைவதோடு மட்டுமல்லாமல், மார்க்காவ் சங்கிலியாகவும் அமைகிறது. இது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் பிரதி ≥ 1 என்றிருக்கும்போது மட்டும்தான் சாத்தியமாகிறது.

மாதிரி: ஒரு நபர் தொடர்ந்து இரு நாள்கள் ஒரே கோவிலுக்குச் செல்வது கிடையாது. ஆனால் A என்ற கோவிலுக்குச் சென்றால் அதற்கடுத்த நாள் அவர் B என்ற கோவிலுக்குச் செல்வது உறுதியாகும். ஆனால் B என்ற கோவில் அல்லது C என்ற கோவிலுக்குச் சென்ற மறுநாள் அவர் A என்ற கோவிலுக்குச் செல்வதற்கான வாய்ப்பும், மற்றொரு கோவிலுக்குச் செல்வதற்கான வாய்ப்பும் சமம் என்று கொடுக்கப்பட்டால், இந் நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கும் மார்க்காவின் நிலைத்திரிபு அணியைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளைக் கருத்தில் கொள்ளும் பொழுது இவை ஒரு ஸ்டொக்காஸ்டிக் முறையை விளக்குகிறது என்பது நிச்சயமாகிறது. ஏனெனில் ஒரு நாளில் நடக்கும் நிகழ்ச்சி, அதற்கு முதல் நாள் நடைபெற்ற நிகழ்ச்சியைப் பொறுத்து அமைந்துள்ளது. முதல் நாள் அந்த நபர் A என்ற கோவிலுக்குச் சென்றால், அடுத்த நாள் B என்ற கோவிலுக்குச் செல்வது உறுதி என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது, A என்ற நிலையிலிருந்து B என்ற நிலைக்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு 1 ஆகும். ஆனால் B என்ற நிலையிலிருந்து C என்ற நிலைக்கோ, அல்லது A என்ற நிலைக்கோ செல்வதற்கான வாய்ப்புகள் சமம் என்பதால்,

$p_{21} = p_{23} = p_{31} = p_{32} = \frac{1}{2}$ என்று அறிகிறோம்.

எனவே

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

என்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியைப் பெறுகிறோம்.

எதிர்தாக்கும் தடங்கலையுடைய ராண்டம் நடை (Random Walk with Reflecting Barriers)

வரைபடத் தாளில் X அச்சில், அடுத்து அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 1 அலகு என்றிருக்குமாறு முறையே ஆதியின் வலப்புறத்தில் m புள்ளிகளைக் கருத்தில் கொள்வோம். ஆதிக்கும், mஆவது புள்ளிக்கும்

இடையேயுள்ள (m – 1) புள்ளிகளுள் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஓர் அணு (particle) இருப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த அணு X அச்சின் மீது வலப்புறம் 1 அலகு தூரம் செல்வதற்கான நிகழ்தகவை p என்றும், இடப்புறம் 1 அலகு தூரம் செல்வதற்கான நிகழ்தகவை $q = (1 - p)$ என்றும் கொள்வோம். மேலும், அந்த அணு ஆதியிலிருந்து ஓர் அலகு தூரம் வலப்புறம் மட்டும் தான் செல்லமுடியும் என்றும், m ஆவது புள்ளியிலிருந்து ஓர் அலகு தூரம் இடப்புறம் மட்டும்தான் செல்லமுடியும் என்றும் கருதுவோம். அதாவது, ஆதியிலிருந்து 1 ஆவது புள்ளிக்கும், m-லிருந்து (m – 1)ஆவது புள்ளிக்கும் தாவி அது ஒரே நேரத்தில் செல்லமுடியும் என்று பொருளாகும்: இத்தகைய நிகழ்ச்சி மார்க்காவ் சங்கிலி என்பதை உணரலாம். அந்த அணுவானது iஆவது புள்ளியில் இருக்கும் நிகழ்ச்சியை e_i என்ற நிலையினால் குறிப்பிட்டால் மார்க்காவ் சங்கிலியின் நிலைவெளி (state space) $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ எனும் தொடர்முறையாக அமைகிறது. இதற்கான நிலைத்திரிபு அணி கீழ்க்காணுமாறு அமைகிறது.

$$
P = \begin{array}{c} \\ e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_0 & e_1 & e_2 & \ldots\ldots & e_{m-1} & e_m \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 . & 0 \\
q & 0 & p & 0 \ldots & 0 . & 0 \\
0 & q & 0 & p \ldots & 0 . & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

இந்த அணியின் முதல்நிரை, அந்த அணு e_0 என்ற நிலையிலிருந்து e_1 என்ற நிலைக்குச் செல்லும் என்பதையும், கடைசி நிரை அது e_m என்ற நிலையிலிருந்து e_{m-1} என்ற நிலைக்குச் செல்லும் என்பதைக் குறிக்கின்றன. மற்ற ஒவ்வொரு நிரையும். அது e_i என்னும் நிலையிலிருந்து e_{i+1}- க்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு p என்றும், e_{i-1}-க்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு q என்றும் தெரிகிறது. இவ்வாறாக (m+1) புள்ளிகளுக்கிடையே அமையும் ராண்டம் நடையை அணியின் வெவ்வேறு நிரைகளின் மூலம் காணலாம்.

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொகுதியானது ஏதேனும், ஒரு நேரத்தில் e_i என்ற நிலையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு p_j என்க. i-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஏற்பக் கிடைக்கப்

பெறும் நிகழ்தகவுகளை $p = (p_1, p_2, \ldots . p_m)$ என்ற வெக்டரால் குறிப்போம். இந்த வெக்டரை அக் குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஏற்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவல் என்கிறோம். இவ்வாறாக ஸ்டொக்காஸ்டிக் முறை தொடக்க நிலைக்கான பரவலை

$$p^{(0)} = \left[p_1^{(0)}, \ p_2^{(0)}, \ldots\ldots, \ p_m^{(0)} \right]$$ என்றும் முதல் n

அடிகளுக்குப் பிறகு அமைந்த நிலைக்கான பரவலை

$$p^{(n)} = \left[p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots\ldots, p_m^{(n)} \right]$$ என்றும் குறிப்பிடுகிறோம்.

மார்க்காவ் சங்கிலியின் ஈர்க்கும் நிலைகள் (Absorbing States of a Markov chain)

மார்க்காவ் சங்கிலியை ஏற்படுத்தும் ஒரு தொகுதியானது e_i என்ற ஒரு நிலையை அடைந்த பிறகு, அந்த நிலையிலேயே இருந்துவிட்டால், e_i என்ற நிலை, அத்தொகுதியின் ஈர்ப்பு நிலையாக அமைகிறது. ஈர்ப்பு நிலையைப் பெற P என்ற நிலைத்திரிபு அணியின் $_i$ஆவது நிரையும், முக்கிய மூலை வரையும் சந்திக்கும் இடத்திலுள்ள மூலகமானது 1 என்றிருந்து அந் நிரையின் மற்றெல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும்.

$$\text{இவ்வாறாக } P = \begin{array}{c} \\ e_0 \\ e_1 \\ e_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{m-1} \\ e_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & \ldots\ldots & e_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots. & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots.. & 0 \\ . & . & . & . & \ldots. & . \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

என்ற அணியானது இரு ஈர்ப்பு நிலைகளோடு அமைந்த மார்க்காவின் நிலைத்திரிபு அணியாகும் (Two Absorbing States of Markov Chain's Transition Matrix).

P என்ற ஒரு மார்க்காவ் சங்கிலியின் நிலைத்திரிபு அணியைக் கருதுக. e_j என்ற நிலை, இத் தொகுதியின் ஈர்க்கும் நிலையாக இருந்தால் $i \neq j$ என்றிருக்கும்பொழுது n-ன் அனைத்து மதிப்புகளும் n அடி நிலைத்திரிபு நிகழ்தகவான $p_{ij}^{(n)}$ –ன் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும். எனவே P–ன் ஒவ்வொரு படி அணியிலும் குறைந்தது ஒரு மூலகமாகிலும் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும். அதாவது, P ஆனது ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியாக இருக்காது.

குறிப்பு : P என்ற மார்க்காவ் சங்கிலி முறையின் நிலைத்திரிபு அணியைக் கருதினால், ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில், அத்தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் p என்றிருந்தால் பின்பு ஓர் அடிக்கு அடுத்து அத்தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவல் p . P ஆகும். இதேபோன்று, n அடிகளுக்குப் பிறகு அதன் நிகழ்தகவுப் பரவல் p P^n ஆகும்.

அதாவது $p^{(1)} = p^{(0)} P$

$$p^{(2)} = p^{(1)} P = p^{(0)} . P^2$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$p^{(n)} = p^{(0)} P^n$ ஆகும்.

குறிப்பு : மார்க்காவ் சங்கிலி முறையின் நிலைத்திரிபு அணி P என்றால், n அடி நிலைத்திரிபு அணி P–ன் nஆவது படிக்குச் சமமாக இருக்கும். அதாவது $p^{(n)} = P^n$ ஆகும்.

மாதிரி : ஒரு மார்க்காவ் சங்கிலியின் நிலைத்திரிபு அணி

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ என்றும், தொடக்க நிலைக்கான

நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் பின்வருவனவற்றை விளக்கி அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(i) $p_{12}^{(2)}$, (ii) $p_{21}^{(2)}$, (iii) $P^{(2)}$, (iv) $p_1^{(2)}$.

(i) $p_{12}^{(2)}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி e_1 என்ற நிலையிலிருந்து e_2 என்ற நிலைக்கு 2 அடிகளில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவாகும். இதன் மதிப்பை p^2 என்ற 2 அடி நிலைத்திரிபு அணியிலிருந்து பெறலாம். அதாவது,

$$p^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$\therefore p_{12}^{(2)} = \frac{9}{16}$ என்று தெரிகிறது.

(ii) இதேபோன்று $p_{21}^{(2)}$ என்பது 2 - அடிகளில் e_2 என்ற நிலையிலிருந்து e_1 என்ற நிலைக்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவாகும்.

$\therefore p_{21}^{(2)} = \frac{3}{8}$ ஆகும்.

(iii) $P^{(2)}$ என்ற வெக்டர் இரண்டு அடிகளுக்குப் பிறகுள்ள அத் தொகுதியின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் குறிக்கும். இந்த வெக்டரைப் பெற, முதலில் $p^{(1)}$ என்ற வெக்டரை கீழ்க் காணுமாறு காணவேண்டும்.

$$p^{(1)} = p^{(0)} . P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$$

$$\therefore p^{(2)} = p^{(1)}.P = \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{13}{32}, \frac{19}{32}\right]$$

$$\therefore p^{(2)} = \left[\frac{13}{32}, \frac{19}{32}\right] \text{ ஆகும்.}$$

(iv) $p_1^{(2)}$ என்ற எண் $p^{(2)}$ என்ற வெக்டரின் முதல் பிரிவாகும். எனவே $p_1^{(2)} = \frac{13}{32}$ ஆகும்.

மாதிரி : மேலே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் உள்ள அணியின் nஆவது படி, P^n அணுகும் அணியைக் காண்க.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad p^{(0)} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

P என்ற அணியின் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை t என்று குறிப்பிட்டால் $tP = t$ என்று இருக்கும்.

$t = [t_1, t_2]$ என்றால் $t_1 + t_2 = 1$

$$\therefore [t_1, t_2] \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [t_1, t_2]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{3}{4} t_1 + \frac{1}{2} t_2, \frac{1}{4} t_1 + \frac{1}{2} t_2\right] = [t_1, t_2]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} t_1 + \frac{1}{2} t_2 = t_1 \Rightarrow \frac{1}{2} t_2 = \frac{1}{4} t_1$$

$$\frac{1}{4} t_1 + \frac{1}{2} t_2 = t_2 \Rightarrow \frac{1}{2} t_2 = \frac{1}{4} t_1$$

$$\frac{1}{2}\, t_2 = \frac{1}{4}\, t_1 \Rightarrow 2\, t_2 = t_1$$

$$\Rightarrow 2(1 - t_1) = t_1 \quad (\because t_1 + t_2 = 1)$$

$$\Rightarrow \quad 3t_1 = 2$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad t_2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ t = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$ ஆகும்.

P^n என்ற அணியை அணுகும் அணியை T எனக் கொண்டால்

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

மாதிரி: சீட்டாட்டம் ஒன்றில் X என்பவருக்குக் கிடைக்கும் வெற்றி வாய்ப்புகள் ஒரு தொடர்முறையில் அமைகின்றது. ஓர் ஆட்டத்தில் அவருக்கு வெற்றி கிடைத்தால், அதற்கு அடுத்த ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு 0·8 என்று தெரிகிறது. ஆனல் ஏதேனும் ஓர் ஆட்டத்தில் தோல்வியடைந்தால் அதற்கடுத்த ஆட்டத்தில் அவருக்குத் தோல்வி ஏற்படுவதற்கான வாய்ப்பு 0·6 என்றிருக்கும்.

அவர் முதல் ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறச் சரிசம வாய்ப்பு இருக்குமென்றால் அவர்

(i) இரண்டாவது ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(ii) மூன்றாவது ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(iii) பல ஆட்டங்களில் எத்தனை முறை வெற்றிபெறுவார் என்றும் கணக்கிடுக.

இங்கு வெற்றி, தோல்வி என்ற இருநிலைகள்தாம் உள்ளன. வெற்றியை S என்றும், தோல்வியை F என்றும் குறிப்பிடுவோம். பின்பு மார்காவ் சங்கிலியின் ஸ்டொகாஸ்டிக் அணியான P ஆனது பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$P = \begin{array}{c} \\ S \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{\cdot}8 & 0{\cdot}2 \\ 0{\cdot}4 & 0{\cdot}6 \end{bmatrix} \end{array}$$

மேலும் X என்பவர் முதல் ஆட்டத்தில் வெற்றிபெறச் சரிசம வாய்ப்புண்டு எனக் கொடுக்கப்பட்டதால் தொடக்க நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$p^{(0)} = [0{\cdot}5\ ,\ 0{\cdot}5] \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{(i)}\quad p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P = [0{\cdot}5\ ,\ 0{\cdot}5]\begin{bmatrix} 0{\cdot}8 & 0{\cdot}2 \\ 0{\cdot}4 & 0{\cdot}6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} S & F \\ [0.6 & 0.4] \end{array} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ p_s^{(1)} = 0{\cdot}6 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, இரண்டாம் ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு 60% உள்ளது என்று தெரிகிறது.

$$\text{(ii)}\ p^{(2)} = p^{(1)}\ .P$$

$$= [0{\cdot}6\quad 0{\cdot}4]\begin{bmatrix} 0{\cdot}8 & 0{\cdot}2 \\ 0{\cdot}4 & 0{\cdot}6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} \mathbf{S} & \mathbf{F} \\ [0{\cdot}64 & 0{\cdot}36] \end{array}$$

$$\therefore\ p_s^{(2)} = 0{\cdot}64 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே மூன்றும் ஆட்டத்தில் X-ன் வெற்றிக்கான வாய்ப்பு 64% ஆகும்.

(iii) P அணியின் மாற்றமற்ற நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை $t = [t_1, t_2]$ எனக் கொள்வோம்.
பின்பு $t_1 + t_2 = 1$ என்றும் $tp = t$ என்றும் அறிவோம்.

$$\therefore\ [t_1, t_2]\begin{bmatrix} 0{\cdot}8 & 0{\cdot}2 \\ 0{\cdot}4 & 0{\cdot}6 \end{bmatrix} = [t_1,\ t_2] \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அதாவது } 0{\cdot}8\, t_1 + 0{\cdot}4\, t_2 = t_1$$

$$0{\cdot}2\, t_1 + 0{\cdot}6\, t_2 = t_2$$

$$\therefore\ 0{\cdot}8t_1 + 0{\cdot}4\ (1 - t_1) = t_1$$

$$\Rightarrow\ 0{\cdot}8\, t_1 - 0{\cdot}4\, t_1 + 0{\cdot}4 = t_1$$

$$\Rightarrow\ 0{\cdot}6\, t_1 = 0{\cdot}4$$

$$t_1 = \tfrac{2}{3}$$

$$\therefore\ t_2 = \tfrac{1}{3} \text{ ஆகும்.}$$

$$\because\ t = \overset{S}{\left[\ \tfrac{2}{3},\right.}\ \overset{F}{\left.\tfrac{1}{3}\ \right]} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, பல ஆட்டங்களில் $\frac{2}{3}$ பங்கு ஆட்டங்கள் X-க்கு வெற்றியைத் தரும்.

மாதிரி : ஒரு மார்க்காவ் சங்கிலிக்கான நிலைதிரிபு அணி

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ என்றும்,}$$

தொடக்க நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = [\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\ ]$

என்றும் இருந்தால் (i) $p^{(2)}_{13}$ (ii) $p^{(2)}_{23}$ (iii) $p^{(2)}$ (iv) p^{n} ன் எல்லை மதிப்பு முதலியவைகளைக் காண்க.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P.\,P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

ஆனல் $p^{(2)} = p^2$ ஆகும்.

எனவே (i) $p_{18}^{(2)} = \frac{3}{8}$ (ii) $p_{18}^{(2)} = \frac{1}{2}$ என்று அறியலாம்.

$$\text{(iii)}\ p^{(1)} = p^{(0)} P = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= [\tfrac{3}{4}, 0, \tfrac{1}{4}]$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = [3, 0, \tfrac{1}{4}] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= [\tfrac{7}{16}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{16}]$$

(iv) கொடுக்கப்பட்ட அணியின் மாற்றம் பெருத நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரை $t = [t_1, t_2, t_3]$ எனக் கொள்வோம். பின்பு $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ ஆகும்.

$$\therefore [t_1, t_2, t_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = [t_1, t_2, t_3]$$

இதிலிருந்து

$$\tfrac{1}{2} t_1 + t_2 + \tfrac{1}{4} t_3 = t_1$$

$$t_2 = \tfrac{1}{2} t_3$$

$$\tfrac{1}{2} t_1 + \tfrac{1}{4} t_3 = t_3$$

$\therefore t_1 = \frac{3}{2} t_3,\ y = \frac{1}{2} t_3$ என்றும் பெறுகிறேம்.

ஆனல் $t_1 + t_2 + t_3 = 1$

எனவே $\frac{3}{2} t_3 + \frac{1}{2} t_3 + t_3 = 1 \Rightarrow t_3 = \frac{1}{3}$

$\therefore t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{6}$

இவ்வாறு $t = [\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ என்று பெறுகிறோம்.

P^n எனும் அணியின் எல்லை மதிப்பை T என்ற அணியாக கொண்டால்

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ என்று பெறுகிறோம்.

பயிற்சி

(1) மார்க்காவ் சங்கிலி என்றால் என்ன? ஒழுங்கு ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி என்றால் என்ன? அதன் பண்புகளை விவரிக்கவும்.

(2) $$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ என்ற ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியின் நிலையான நிகழ்தகவு வெக்டரைக் காண்க. மேலும் $P^{(n)}$ அணுகக் கூடிய அணியையும், $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \cdot P^n$ அணுகக் கூடிய வெக்டரையும் காண்க.

(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணிகளுள் எவை ஒழுங்கு அணிகள் என்பதைக் கண்டுபிடி.

(i) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ (ii) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(4) கம்பெனியில் வேலைசெய்யும் ஓர் அதிகாரி ஒவ்வொரு நாளும் காரிலோ அல்லது ஸ்கூட்டரிலோ கம்பெனிக்குச் செல்வது வழக்கம். தொடர்ச்சியாக இரண்டு நாட்கள் அவர் ஸ்கூட்டரில் செல்வாரானல் மூன்ருவது நாள் அவர் காரில் செல்வதற்கான வாய்ப்பு சரிசமமாக இருக்குமென்ருல், இந் நிகழ்ச்சிகளுக்கான ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணியைக் காண்க.

(5) எதிர் தாக்கும் தடங்கலையுடைய ராண்டம் நடை என்ருல் என்ன? ஒரு மார்க்காவ் சங்கிலி எப்பொழுது ஈர்க்கும் நிலையில் உள்ளது என்று கூறுகிருேம்? இதைப்பற்றி விவரிக்கவும்.

(6) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ என்ற மார்க்காவ்-ன் நிலைத்திரிபு அணி கொடுக்கப்பட்டு, தொடக்க நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் பின்வருவனவற்றை விளக்கி அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $p_{12}^{(2)}$ (ii) $p_{21}^{(2)}$ (iii) $p^{(2)}$ (iv) $p_1^{(2)}$

(7) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ என்ற மார்க்காவ்-ன் நிலைத்திரிபு அணி கொடுக்கப்பட்டு, தொடக்க நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = (\frac{1}{9}, \frac{8}{9})$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டால் பின் வருவனவற்றை விளக்கி அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $p_{12}^{(2)}$ (ii) $p_{21}^{(2)}$ (iii) $p^{(2)}$ (iv) $p_1^{(2)}$

(8) $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{bmatrix}$ என்ற மார்க்காவ்-ன் நிலைத்திரிபு அணி கொடுக்கப்பட்டு, தொடக்க நிலைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவல் $p^{(0)} = (\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7})$. என்றும்

கொடுக்கப்பட்டால் பின்வருவனவற்றை விளக்கி அவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $p_{12}^{(3)}$ (ii) $p_{13}^{(3)}$ (iii) $p_{32}^{(3)}$ (iv) $p_{33}^{(3)}$

(v) $p^{(3)}$ (vi) $p_1^{(3)}$.

(9) டென்னிஸ் விளையாட்டின்பொழுது A என்பவருக்குக் கிடைக்கும் வெற்றி வாய்ப்புகள் ஒரு தொடர் முறையில் அமைகின்றன. ஓர் ஆட்டத்தில் அவருக்கு வெற்றி கிடைக்குமானுல், அதற்கு அடுத்த ஆட்டத்தில் அவர் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு 0·7 என்று தெரிகிறது. ஆனுல், ஏதேனும் ஓர் ஆட்டத்தில் தோல்வியுற்றுல் அதற்கு அடுத்த ஆட்டத்தில் அவருக்குத் தோல்வி ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·3 என்றிருக்கும். அவர் முதல் ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறச் சரிசம வாய்ப்பு இருக்குமானுல் அவர்,

(i) இரண்டாவது ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(ii) மூன்ருவது ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும்,

(iii) பல ஆட்டங்களில் எத்தனை முறை வெற்றியடைவார் என்பதையும் கணக்கிடுக.

(10) X,Y என்ற இரண்டு பைகளுள் முதல் பையில் 2 சிவப்புப் பந்துகளும், இரண்டாவது பையில் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அப் பைகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும், ஒரு பந்தை எடுத்து மற்றொரு பையில் மாற்றி வைக்கப்படுகிறது. இத்தகைய நிகழ்ச்சியின்போது e_i என்ற நிலை X எனும் பையில் இருக்கக்கூடிய கறுப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை i என்றிருப்பதைக் குறிக்கும் எனக் கொண்டு, இந் நிகழ்ச்சிக் கோவையின் நிகழ்தகவு அணியைக் காண்க. மேலும் மூன்று அடிகளுக்குப் பின் X என்ற பையில் 2 கறுப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும், இவ்வாறு நடைபெறும் பல முயற்சிகளில் X என்ற பையில் 2 கறுப்புப் பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவையும் கணக்கிடுக.

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute value — எண்ணளவு
Absorbing state — ஈர்க்கும் நிலை
Abstract — புலனாகாத
Accuracy — திருத்தம்
Actual — உண்மையான
Addition — கூட்டல்
,, Law — கூட்டல் விதி, கூட்டல் தேற்றம்
Aggregate — மொத்தம்
Algebraic Procedure — இயற்கணித முறை
Allocation — பங்கீடு
Analytic method — பகுப்பாய்வு முறை
Apparent — வெளிப்படையான
Approximate — தோராயமான
Arithmetic mean — கூட்டுச் சராசரி
Array — வரிசை
Arrival rate — வரும் விகிதம்
Asymmetry — சமச்சீரின்மை
Average — சராசரி
Axiom — வெளிப்படை உண்மை

B

Base — அடிப்படை
Best fit — மிகச் சிறந்த பொருத்தம்
Bias — பிறழ்ச்சி
Biased — பிறழ்ச்சியான
Binomial — ஈருறுப்பு
,, Distribution — ஈருறுப்புப் பரவல்
,, Theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Birth — பிறப்பு
Birth Process — பிறப்பு வழிமுறை
Birth Death Process — பிறப்பு இறப்பு வழிமுறை

C

Census	— மக்கட் கணிப்பு, முழுக் கணிப்பு
Central Limit Theorem	— மைய ஒழுங்குத் தேற்றம்
Central moment	— மைய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Central tendency	— மையப் போக்கு
Centre	— மையம்.
Chance	— வாய்ப்பு
Chance games	— வாய்ப்பு விளையாட்டுகள்
Chance variate	— வாய்ப்பு மாறி
Chart	— விளக்கப்படம்
Class	— பிரிவு
Classification, one way	— ஒருவழிப் பாகுபாடு
,, , two way	— இருவழிப் பாகுபாடு
Coefficient	— கெழு
Column	— நிரல்
Column matrix	— நிரல் அணி
Compound events	— கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்
Computation	— கணிப்பு
Compute	— கணி
Conformity	— இணக்கம்
Constant	— நிலையெண்
Continuity	— தொடர்ச்சி
Continuous	— தொடர்ச்சியான
,, function	— தொடர்ச்சியான சார்பு
Convention	— மரபு
Correlation	— ஒட்டுறவு
,, coefficient	— ஒட்டுறவுக் கெழு
,, rank	— தர ஒட்டுறவு
,, table	— ஒட்டுறவுப் பட்டியல்
Covariance	— உடன் மாறுபாடு
Cumulants	— குவிவுகள்
Cumulative Distribution	— குவிவுப் பரவல்
,, frequency	— குவிவு அலைவெண்
Cycle	— சுழற்சி

D

Data	— விவரங்கள்
,, statistical	— புள்ளி விவரங்கள்

Decile — பதின்மானம்
Define — வரையறு
Definition — வரையறை
Degree — படி, அடுக்கு
Degrees of freedom — கட்டின்மைப்படி
Density — அடர்த்தி
,, frequency — அலைவு அடர்த்தி
,, probability — நிகழ்தகவு அடர்த்தி
Dependent — சார்ந்த
,, event — சார்ந்த நிகழ்ச்சி
,, function — சார்ந்த சார்பு
,, variable — சார்புடைய மாறி
Derive — வருவி, தருவி
Derived — வழிவந்த, தருவித்த
,, function — வழிச் சார்பு
,, set — வழிக் கணம்
Deviation — விலக்கம்
,, absolute — மொத்த விலக்கம்
,, average — சராசரி விலக்கம்
,, mean — கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
,, quartile — கால்மான விலக்கம்
,, standard — திட்ட விலக்கம்
Diagram — விளக்கப் படம்
,, scatter — சிதறல் விளக்கப் படம்
,, statistical — புள்ளிவிவர விளக்கப் படம்
Differential difference Equation — வகையீடு வேறுபாட்டுச் சமன்பாடு
Discontinuity — தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuous — தொடர்ச்சியற்ற, தனித்தனி
Dispersion — சிதறல்
,, measures of — சிதறல் அளவைகள்
Distribution — பரவல்
,, binomial — ஈருறுப்புப் பரவல்
,, bivariate — இருமாறிப் பரவல்
Distribution chi-square — கை-வர்க்கப் பரவல்
,, continuous — தொடர் பரவல்
,, discrete — தொடர்ச்சியற்ற பரவல்
,, exponential — அடுக்குக்குறிப் பரவல்
,, frequency — அலைவெண் பரவல்

Distribution multinomial — பல்லுறுப்புப் பரவல்
,, normal — இயல்நிலைப் பரவல்
,, poisson — பாய்ஸான் பரவல்
,, sampling — மாதிரிப் பரவல், கூறுபரவல்
,, skew — சீரிலாப் பரவல், கோட்டப் பரவல்
Distributive Law — பங்கீட்டு விதி
Divergence — விரிவு
Divergent series — விரி தொடர்
Divide — வகு
Divisor — வகுக்குமெண்
Domain — அரங்கம்
Dominance — ஆதிக்கம்
Double integral — இருமாறித் தொகை

E

Element — மூலகம், உறுப்பு
Elementary — ஆரம்ப, தொடக்கத்துக்குரிய
Elementary event — ஆரம்ப நிகழ்ச்சி
Eliminate — நீக்கு
Empirical — அனுபவ வழி, நடைமுறை
,, probability — பட்டறிமுறை நிகழ்தகவு
End state — இறுதிக் கட்டம்
Enumeration — கணக்கெடுப்பு
Equally likely — சமவாய்ப்புள்ள
Equation — சமன்பாடு
Equations, normal — இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்
Error — பிழை
,, absolute — மொத்தப் பிழை
,, normal curve of — இயல்நிலைப்பிழை வளைகோடு
,, probable — நிகழத்தக்க பிழை
,, relative — சார் பிழை
,, sampling — கூறுப் பண்புகளின் பிழை
,, standard — திட்டப் பிழை
Estimate — தோராய மதிப்பு, மதிப்பீடு
Evaluate — மதிப்பு காண்
Even chance — சரிபாதி வாய்ப்பு
Even function — இரட்டைச் சார்பு
,, number — இரட்டை எண்

Event	—	நிகழ்ச்சி
Event compound	—	கூட்டு நிகழ்ச்சி
,, dependent	—	சார்புடை நிகழ்ச்சி
,, favourable	—	சாதக நிகழ்ச்சி
,, independent	—	சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
Events, mutually exclusive	—	ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்
Expectation	—	எதிர்நோக்கல், எதிர்பார்த்தல்
Expectation conditional	—	நிபந்தனைக்குட்பட்ட எதிர் நோக்கம்
Expectation of expectation	—	எதிர் நோக்கலின் எதிர் நோக்கல்
Experiment	—	பரிசோதனை
Exponent	—	அடுக்குக்குறி
Exponential curve	—	அடுக்குக்குறி வளைவு
,, function	—	அடுக்குக்குறிச் சார்பு
,, distribution	—	அடுக்குக்குறிப் பரவல்
Expression	—	கோவை

F

Factor	—	காரணி
Finite	—	திட்டமான
,, class	—	திட்டமான பிரிவு
,, number	—	திட்டமான எண்
,, population	—	வரம்புடைய முழுமைத் தொகுதி
Freedom - Degrees of	—	கட்டின்மை எண்ணிக்கை
Frequency	—	அலைவெண்
,, cumulative	—	குவிவு அலைவெண்
,, curve	—	அலைவெண் வரை
Function	—	சார்பு
Functional relation	—	சார்புடைத் தொடர்பு

G

Gamma function	—	காமாச் சார்பு
Gamma distribution	—	காமாப் பரவல்
Generalisation	—	பொதுவுரை
Generating	—	உருவாக்கும், பிறப்பிக்கும்
Generating function	—	பிறப்பிக்கும் சார்பு
Generator	—	பிறப்பாக்கி

Geometric mean — பெருக்கு ச்சராசரி
Graph — வரைபடம்
Graphical representation — வரைபடக் குறிப்பு

H

Harmonic mean — இசைச் சராசரி, ஹார்மோனிக் சராசரி
Homogeneous — ஓரின, ஒருபடித்தான
Hypothesis — எடுகோள், தற்கோள்

I

Identical — சர்வசம
Identity — சர்வசமம்
Illustration — எடுத்துக்காட்டு
Incompatible — ஒவ்வாத
Inconsistent — பொருந்தாத, முரணான
Increasing function — கூடுஞ் சார்பு
Indefinite integral — வரையறுக்கப்படாத தொகை
Independent — சார்பற்ற
Index — குறி
Induction — தொகுத்தறி முறை
Inductive method — தொகுப்பு வாதம்
Inference — உய்த்துணர்வு
Infinite — வரம்பில்லாத
Infinite population — வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி
Infinity — அனந்தம், முடிவிலி, கந்தழி
Inflexion — வளைவு மாற்றம்
Input process — வரும் முறை
Instant — கணப்பொழுது
Interpolation — இடைச்செருகல்
Invariance — மாற்றமின்மை
nvestigate — ஆய்வு செய்தல்
Investigator — ஆய்வாளர்

K

Kurtosis — தட்டை அளவு
„ Leptokurtic — குறைத்தட்டை
„ Platykurtic — மிகைத் தட்டை

L

Large samples — பெருங்கூறுகள்
Law — விதி
Law of errors — பிழைகளின் விதி
Law of Statistical Regularity — புள்ளியியல் ஒழுங்கு விதி
Least squares - method of — மீச்சிறு படி முறைகள்
Limit — ஒருங்கு வரம்பு
Limiting value — ஒருங்கு மதிப்பு
Linear — நேர்கோட்டுக்குரிய, ஒருபடிக்குரிய
Linear combination — ஒருபடிச் சேர்க்கை
,, function — ஒருபடிச் சார்பு
Linear programming — ஒருபடித் திட்டமுறை
Logarithm — இலாகரிதம், மடக்கை
Logarithmic series — மடக்கைத் தொடர்

M

Markov chain — 'மார்க்காவ்' சங்கிலி, 'மார்க்காவ்' நிகழ்ச்சிக் கோவை
Mass — திணிவு
Matrix — அணி
,, column — நிரல் அணி
,, inverse — நேரெதிர் அணி
,, stochastic — ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி
,, symmetric — சமச்சீர் அணி
,, transpose — நிரல்மாற்று அணி
Measure — அளவு, அளவை
Median — இடைநிலை
Method of approximate solution — தோராயத் தீர்வு காணும் முறை
Minimum — மீச்சிறு, சிறுமம், நீசம்
Minimum element — நீசமூலம்
Mode — முகடு
,, bimodal — இருமுகட்டு
,, multimodal — பல்முகட்டு
,, unimodal — ஒருமுகட்டு
Modulus — எண்ணளவு, மட்டு
Moment — விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

Moment generating function	— விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பு
Multivariate	— பல்மாறி
,, distribution	— பல்மாறிப் பரவல்
,, function	— பல்மாறிச் சார்பு

N

Nature	— இயற்கை, இயல்பு
Necessary and sufficient conditions	— தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகள்
Normal curve	— இயல்நிலை வளைவரை
,, equations	— இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்
Notation	— குறியீடு
Number	— எண்
,, even	— இரட்டை எண்
,, negetive	— எதிர்மறை எண்
,, odd	— ஒற்றை எண்
,, positive	— நேர்மறை எண், மிகை எண்
,, real	— மெய்யெண்
Numerical	— எண்ணுக்குரிய
,, analysis	— எண்சார் பகுப்பாய்வு
,, value	— எண் மதிப்பு

O

Object	— பொருள்
Observation	— கண்டறிந்த மதிப்பு
Observed data	— கண்டறிந்த விவரங்கள்
Odds against	— பாதக விகிதம்
Odds in favour	— சாதக விகிதம்
Ogive	— ஒகைவ், வளர் நிகழ்வரை
,, less than	— கீழின ஒகைவ்
,, greater than	— மேலின ஒகைவ்
One way classification	— ஒருவழி வகுப்பாக்கம்
Order	— வரிசை
Origin	— ஆதி
Oscillation	— அலைவு, ஊசல்
Oscillatory series	— அலைத் தொடர்

P

Parameter	— சுட்டுறுப்பு

Particle	—	துகள்
Pay off	—	இழப்பு-ஈட்டிப்பு
Peak	—	முனை, உச்சி
Peakedness	—	சிகரத்தன்மை
Percent	—	சதவீதம்
Percentage error	—	சதவீதப் பிழை
Percentile	—	நூற்றுமானம்
Period	—	காலம்
Pilot enquiry	—	முன்னோடி விசாரணை
Pilot survey	—	முன்னோடி அளவெடுப்பு
Point	—	புள்ளி
Point at infinity	—	அனந்தப் புள்ளி, முடிவிலிப் புள்ளி
Pole	—	துருவம்
Population	—	முழுமைத் தொகுதி
,, finite	—	வரம்புடைய முழுமைத் தொகுதி
,, infinite	—	வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி
,, hypothetical	—	கற்பனை முழுமைத் தொகுதி
,, stationary	—	நிலைமாறு முழுமைத் தொகுதி
Population estimate	—	மக்கள் மதிப்பீடு
Precise	—	திட்டமான
Precision	—	திட்டம்
Prediction	—	முன்கூற்று
Primal problem	—	பிரைமல் கணக்கு
Principal	—	தலையாய
Principle	—	தத்துவம்
Probable	—	நிகழக்கூடிய
Probability	—	நிகழ்தகவு
,, absolute	—	தனி நிகழ்தகவு
,, addition law of	—	நிகழ்தகவு கூட்டல் விதி
,, aposteriori	—	பின் நிகழ்தகவு
,, apriori	—	முன் நிகழ்தகவு
,, compound	—	நிகழ்தகவுச் சேர்க்கை
,, conditional	—	நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவு
,, density function	—	நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
Probability joint	—	கூட்டு நிகழ்தகவு
,, Integral	—	நிகழ்தகவு தொகையீடு
, normal	—	இயல்முறை நிகழ்தகவு

Probability Statistical	— புள்ளியியல் நிகழ்தகவு
Procedure	— செயல்முறை
Process	— வழிமுறை
,, birth	— பிறப்பு வழிமுறை
,, birth and death	— பிறப்பு இறப்பு வழிமுறை
,, stochastic	— ஸ்டொகாஸ்டிக் வழிமுறை
,, yule	— யூல் வழிமுறை
Product	— பெருக்கம்
Property	— தன்மை

Q

Qualitative data	— பண்பின் விவரங்கள்
Quality	— பண்பு, தரம்
,, control	— தரக் கட்டுப்பாடு
Quantity	— கணியம், எண்ணிக்கை
Quantitative data	— எண் அளவை விவரங்கள்
Quarter	— கால் பங்கு
Quartile	— கால்மானம்
,, lower	— முதற் கால்மானம்
,, deviation	— கால்மான விலக்கம்
,, upper	— மூன்றும் கால்மானம்
,, range	— கால்மான இடைவெளி
Queueing theory	— வரிசைக் கொள்கை

R

Random	— சரிசம வாய்ப்புள்ள, ராண்டம்
,, sample	— சரிசம வாய்ப்புக் கூறு
,, variate	— வாய்ப்பு மாறி, ராண்டம் மாறி
,, walk	— ராண்டம் நடை, இயைபிலா நடை
Range	— வீச்செல்லை, இடைவெளி
,, correlation	— தர ஒட்டுறவு, வரிசைத் தொடர்பு
Rate	— வீதம்
Ratio	— விகிதம்
Raw data	— சீர்ப்படா விவரங்கள்
Raw material	— மூலப் பொருள்
Reckon	— கணக்கிடல்
Rectangular game	— சதுர விளையாட்டு

Regression — மாறிகளின் தொடர்பு
,, coefficient — மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு
,, equations — ,, தொடர்புச் சமன்பாடுகள்
Regular — ஒழுங்கான
,, figure — ஒழுங்கான உருவம்
,, matrix — ஒழுங்கு அணி
Regular polygon — ஒழுங்குப் பல்கோணம்
,, sampling method — ஒழுங்கான மாதிரி முறை
Relation — தொடர்பு
Relative — சார்ந்த
,, density — சார் அடர்த்தி
,, error — சார் பிழை
Representation — குறிப்பு
Representative sampling — வகைப்படுத்திய கூற்று முறை
Residue — எச்சம்
Residual error — மீதிப் பிழை
Root — மூலம்
Root mean square deviation — வர்க்கமூலச் சராசரி
Row and column — நிரையும் நிரலும்

S

Sample — கூறு, மாதிரி
,, large — பெருங்கூறு
,, optimum — உத்தமக் கூறு
,, small — சிறு கூறு
Sampling average — கூறுகளின் சராசரி
,, distribution — கூறு பரவல்
,, error — கூறுப் பிழை
,, extensive — விரிவாகக் கூறெடுத்தல்
,, fluctuations — கூறுத்தேர்வின் ஏற்றவிறக்கங்கள்
,, methods — கூறெடுத்தல் முறைகள்
,, purposive — நோக்கத்துடன் கூறெடுத்தல்
,, random — சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல்
,, systematic — முறையாகக் கூறெடுத்தல்
Scalar — எண்ணி, திசையிலி
Scalar product — எண்ணிப் பெருக்கி, புள்ளிப் பெருக்கு
Scatter — சிதறல், பரந்துகிடத்தல்

Scatter diagram	—	சிதறல் விளக்கப்படம்
Semi interquartile range	—	அரை இடைக்கால்மம்
Service rate	—	பணிவிகிதம்
Service time distribution	—	சேவைக்காலப் பரவல்
Set	—	கணம்
,, algebra	—	கண இயற்கணிதம்
,, of points	—	புள்ளிக் கணம்
Significance	—	முக்கியத்துவம்
Significance - test of	—	முக்கியத்துவ சோதனை
Significant	—	பொருளுடைய
,, levels	—	முக்கிய நிலைகள்
,, figures	—	பொருளுடைய இலக்கங்கள்
Single arrival	—	தனி வருகை
Size	—	உருவளவு, பருமன்
Skew	—	சமச்சீரில்லா, சீரற்ற
,, symmetric matrix	—	எதிர்ச்சீர் அணி
Skewness	—	சீரின்மை, கோட்டம்
,, coefficient of	—	கோட்டக் கெழு
,, measures of	—	கோட்ட அளவைகள்
Space	—	வெளி, இடம்
,, two dimensional	—	இருபரிமாண வெளி
,, three ,,	—	முப்பரிமாண வெளி
,, n ,,	—	n - பரிமாண வெளி
,, sub ,,	—	உள்வெளி
Spurious correlation	—	போலித் தொடர்பு
Standard	—	தரமான
Standard error	—	திட்டப் பிழை
Standard error of estimate	—	மதிப்பீட்டுத் திட்டப்பிழை
State space	—	நிலைவெளி
Statistic	—	புள்ளியியல் அளவை
Statistical	—	புள்ளியியலுக்குரிய
,, codification	—	புள்ளிவிவரத் தொகுப்பு
,, diagram	—	,, விளக்கப்படம்
,, graph	—	,, வரைபடம்
,, investigator	—	புள்ளியியல் ஆய்வாளர்
,, measures	—	புள்ளிவிவர அளவைகள்
,, quality control	—	புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு
,, reasoning	—	புள்ளியியல் கருத்துமுறை
,, regularity	—	புள்ளியியல் நிகழ்வொழுங்கு

Statistical research — புள்ளிவிவர ஆய்வு
Statistics — புள்ளிவிவரங்கள், புள்ளியியல்
Step function — படிச் சார்பு
Stochastic matrix — ஸ்டொக்காஸ்டிக் அணி
Surface — புறப்பரப்பு
,, curved — வளைபரப்பு
Symbol — குறியீடு, அடையாளம்
Symmetrical — சீரான
Symmetric matrix — சமச்சீர் அணி
Synthesis — தொகுப்பு
System — தொகுதி, முறை, திட்டம்
Systematic — முறையான, ஒழுங்கான

T

Table — வாய்பாடு, அட்டவணை
,, contingency — நிகழ்வுப் பட்டியல்
,, life — உயிர்ப் பட்டியல்
,, mortality — ஆயுள் பட்டியல்
Tabulate — அட்டவணைப்படுத்து, பட்டியல் அமை
Tabulation — பட்டியலமைத்தல், அட்டவணைப்படுத்துதல்
Telephone — தொலைபேசி
,, exchange — தொலைபேசித் தொடர்பகம்
Test — சோதனை
,, theoretical — அறிமுறைச் சோதனை
Time — நேரம்
Time series — காலம்சார் தொடர்வரிசை
Total — மொத்தம்
,, deviation — மொத்த விலக்கம்
,, error — மொத்தப் பிழை
Transformation — மாற்றங்கள், நிலைமாற்றம்
Transition — நிலைத்திரிபு, நிலைமாற்றம்
,, matrix — நிலைத்திரிபு அணி
,, matrix - n Step — n–படி நிலைத்திரிபு அணி
,, probability — நிலைத்திரிபு நிகழ்தகவு
Transportation — இடமாற்றம்
Trend — போக்கு

U

Unbiased	— பிறழ்ச்சியற்ற
Uniform	— ஒரேசீரான, மாறாத
,, distribution	— சீரான பரவல்
Unimodal	— ஒருமுகட்டு
Unique	— மாற்றற்ற, தனித்தன்மை யுடைய
Uniqueness Theorem	— தனித்தன்மைத் தேற்றம்
Unit	— அலகு
,, absolute	— தனி அலகு
,, derived	— வழி அலகு
,, standard	— திட்ட அலகு
,, matrix	— அலகு அணி
,, vector	— அலகு வெக்டர்
Unsymmetric	— சமச்சீரில்லா
,, distribution	— சமச்சீரில்லாப் பரவல்

V

Value	— மதிப்பு, பெறுமானம்
,, approximate	— தோராய மதிப்பு
,, limiting	— ஒருங்கு மதிப்பு
,, maximum	— மீப்பெரு மதிப்பு
,, minimum	— மீச்சிறு மதிப்பு
Variable	— மாறி
,, point	— மாறும் புள்ளி
Variation	— மாறல்
,, coefficient of	— மாறுபாட்டுக் கெழு

W

Waiting time	— காத்திருக்கும் நேரம்
Walk	— நடை
,, random	— ராண்டம் நடை, இயைபிலா நடை
Weak Law of	— மெலிந்த பேரினங்களின் விதி
Weight	— நிறை
Weighted average	— நிறையிட்ட சராசரி

Z

Zero	— பூச்சியம்